



# Risques et fragilités des réseaux interbancaires

Sébastien Vivier-Lirimont

## ► To cite this version:

Sébastien Vivier-Lirimont. Risques et fragilités des réseaux interbancaires. Economies et finances. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2006. Français. NNT: . tel-00136543

**HAL Id: tel-00136543**

**<https://theses.hal.science/tel-00136543>**

Submitted on 14 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ PARIS I PANTHÉON – SORBONNE**

**U.F.R. de SCIENCES ÉCONOMIQUES**

Numéro attribué par la bibliothèque

| 2 | 0 | 0 | 6 | P | A | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 7 |

Année 2006

**T H È S E**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES ECONOMIQUES**

Présentée et soutenue publiquement par

**Sébastien Vivier-Lirimont**

le 12 Juin 2006

---

Risques et fragilités dans les réseaux interbancaires

---

**Directeur de thèse :**

**Monsieur Hubert Kempf, Professeur à l'Université Paris I**

---

**JURY :**

<b>Michel Boutillier</b>	<b>Professeur à l'Université Paris X</b>
<b>Thierry Chauveau</b>	<b>Professeur à l'Université Paris I</b>
<b>Matthew Jackson</b>	<b>Professeur au California Institute of Technology</b>
<b>Hubert Kempf</b>	<b>Professeur à l'Université Paris I</b>
<b>Henri Pagès</b>	<b>Conseiller Scientifique, DGEI Banque de France</b>

L'UNIVERSITE PARIS I PANTHEON – SORBONNE n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses ; ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

# Remerciements

*Mes remerciements s'adressent en premier lieu, et à double titre au Pr. Hubert Kempf qui a accepté de diriger cette thèse, et m'a accueilli au sein du laboratoire EUREQua. Son suivi de mon mémoire de DEA à l'achèvement de la thèse m'a permis de cultiver mon goût pour la recherche. Ses conseils ont toujours été précieux, et ses encouragements ont su me donner l'énergie nécessaire à ce travail de longue haleine. Ses exigences et son enthousiasme m'ont offert la sérénité et l'assurance indispensable à l'écriture de cette thèse. Ces quelques lignes de remerciement sont bien peu en regard de la qualité de son accompagnement. Qu'il y trouve, je l'espère, l'expression de toute ma reconnaissance.*

*Pendant ces années de thèse, EUREQua a constitué un cadre idéal pour les réflexions et les échanges scientifiques. Je remercie à ce titre tous les membres de l'équipe scientifique et administrative. Mes remerciements iront particulièrement à Jean-Marc Tallon, Jean-Pierre Drugeon, et Rodrigue Mendez. Roland Gilet de l'UFR 06 a su apporter une oreille attentive et un regard expert sur mes travaux, et je l'en remercie. L'Université Paris 1 Panthéon Sorbonne, où j'ai exercé en tant que Moniteur puis ATER, m'a offert l'opportunité d'une formation pédagogique remarquable et des contacts riches avec des étudiants de niveaux divers qui m'ont tous humainement beaucoup apporté. Reims Management School m'a accueilli au sein d'une équipe soudée et amicale. J'y ai trouvé des partenaires plus que des collègues, des responsabilités, du soutien et de l'écoute. Je remercie tous les membres de l'équipe de professeurs, et particulièrement ceux du département Finance au premier chef desquels Maryline Thénod,*

*mais aussi Christophe Bouteiller mon "colocataire" de bureau, Loïc Ernest, Hervé Colas, et François Bonvalet, et encore Bénédicte S., Sylvie, Thierry, Isabelle G., Isabelle M., Tawhid, Lila, Aloïs, Marie-Pascale, Stéphane, Anton, Rouslan, Alain, et Maria. Enfin, un mot particulier doit être dédié à Bénédicte Béving Christelle Benjadi et Véronique Dinvaut, elles sont les assistantes dont tout enseignant chercheur peut rêver.*

*Si la thèse est un exercice au dessus du vide, celui-ci a grandement été comblé par les bonheurs que j'ai eu la chance de rencontrer, bonheurs de rencontres formidables. Mes remerciements s'adressent à tous ceux qui ont fait de ces années de thèse de très belles années, riches en amitiés. Quand la recherche se fait satrape, Pascale Petit et Gaëlle Vassogne ont toujours su m'apporter l'onguent de leur joie et de leur amitié, de leur bonne humeur et de leur énergie. Merci à elles et à Vincent. Quand la routine semblait l'emporter, j'ai toujours pu compter sur les discussions effrénées du couloir des doctorants pour trouver une nouvelle énergie, et je dois à ce titre remercier Nicolas Couderc, El Hadji et Falilou Fall, Audrey Desbonnet, François Fontaine, Nathalie Bohl et Marie-Laure Michaud. Quand la peur de la solitude envahissait l'horizon, j'ai toujours trouvé auprès de mes camarades de thèse la certitude d'un combat à plusieurs et c'est à ce titre que je remercie Andrea, Audrey, Caroline, Céline, Chanez, Djamel, El Hadji, Estelle, Etienne, Fabien, Falilou, François, Hippolyte, Jeanne, Julie, Lise, Lucie, Marie-Laure, Morgane, Nicolas H., Nicolas M., Olfa, Othman, Pascale, Sébastien, Solenne, Sumudu et Thomas.*

*Ceux qui ont marqué mon parcours par leur présence et leur talent, qui ont su me donner l'envie de progresser et de m'investir dans la recherche et l'enseignement doivent recevoir toute ma gratitude. Celle-ci s'adresse à Anne Michelin, Axel Preiss, Pascal Gauchon, Bertrand Munier, Nicolas Drouhin, Véronique de Chantérac et encore à Hubert Kempf.*

*Mes pensées vont aussi à mes amis. Tous ont su supporter, à des degrés divers,*

*mes absences, et mes inconstances, mes oublis et mes indisponibilités. C'est à cette compréhension et à cette patience que l'on reconnaît ses vrais amis, ceux qui vous soutiennent et savent ne pas vous tenir rigueur de toutes les infidélités qu'a provoquées la maîtresse exclusive que fut cette thèse. Merci à Anne Céline Muller et Denis Diata, Laurent et Olfa Kettenmeyer, Marc et Albane Liegeon, Olivier et Florence Ségurel, Gaëlle Vassogne, Dimitri et Aurore Kasvini, Jean-Marc Souvré et Fabrizio Salomone, Christophe Chantepy, Michel Savart et Michael Javed, Stanislas et Vanessa Lemor, Yves et Aurélie Gounin.*

*En ce moment particulier ma famille est au coeur de mes remerciements car elle est, et sera toujours, la clé de voûte qui soutient l'ensemble, le pilier premier sur lequel j'ai pu bâtir bien au-delà de cette thèse, ma vie.*

*Enfin, sans toi, sans ta présence, et sans ta patience, ce travail aurait été impensable.*

*A mes parents,*

*A Claire,*

*A Olivier,*

**"Tous les fleuves vont à la mer,  
et pourtant, la mer n'est pas remplie"**

**L'Ecclésiaste I,7**





# Introduction Générale

Il est fort plus aisé de définir l'instabilité financière que son contraire. La stabilité financière renvoie, en effet, à une réalité très large. Elle recoupe des enjeux tant en économie qu'en finance, renvoie tout à la fois à l'occurrence d'événements déstabilisateurs, ainsi qu'à leur propagation au long d'un système financier. La cerner nécessite donc quelques définitions préliminaires.

On peut définir un système financier comme l'ensemble des institutions qui participent du financement de l'économie : banques, institutions financières, et marchés financiers. Les intervenants, qui y sont privés et publics, peuvent se répartir en trois sous-ensembles.

En premier lieu, l'Etat, et la banque centrale sont des intervenants majeurs au sein du système financier : d'une part l'Etat emprunte, la banque centrale gère la liquidité sur les marchés par ses interventions, d'autre part, les autorités publiques définissent le dessin institutionnel du système financier en assurant la surveillance, en délivrant les autorisations, ou les agréments d'intervention pour les opérateurs. Pour la surveillance des marchés, et des banques, l'Etat recourt à des agences. En France, il s'agit de l'AMF (Autorité des Marchés Financiers), de la Commission Bancaire ou du CECEI (Comité des Etablissements de Crédits et des Entreprises d'Investissement). Aux Etats-Unis, la SEC (Security and Exchange commission) est le pendant de l'AMF. Pour garantir les dépôts des agents dans les institutions bancaires, d'autres agences, au rôle assurantiel, ont été mises en place comme le FDIC (Federal Deposit Insurance Company) créée en pleine tourmente des années 1930 aux Etats Unis pour limiter les " courses à la banque ".

En second lieu, les banques et les institutions financières comme les fonds de pension, ou les compagnies d'assurance sont le cœur du système financier. Quantitativement, leurs interventions sont, en effet, les plus importantes. Qualitativement, elles jouent un rôle de pivot : elles collectent l'épargne des agents, la redistribuent via des crédits à l'économie, se refinancent sur les marchés ou auprès de la banque centrale, et

répercutent la politique monétaire sur les débiteurs et créditeurs.

En troisième lieu les marchés financiers apparaissent comme les nœuds autour desquels se lient les différentes relations. Les différents compartiments du marché sont les lieux sur lesquels se rencontrent les intervenants pour y réaliser les échanges de liquidité, de titres, ou de devises.

Dès lors, l'expression de " système financier " embrasse une large réalité, il comprend des institutions publiques et privées, et renvoie également aux processus, accords, ou relations opérationnelles liant les différents intervenants. Du fait de l'intensité des relations entre ces différents agents, toute perturbation localisée en un point du système peut conduire à une déstabilisation de grande ampleur du système financier dans son ensemble, selon un processus de contagion.

La notion de stabilité financière impose non seulement le fonctionnement adéquat de la finance dans sa fonction d'allocation des ressources, mais aussi, un fonctionnement correct du système de paiements (de gros et de détail) de façon à ce que la monnaie centrale et ses substituts proches, comme les dépôts bancaires, remplissent leur rôle d'intermédiaire universel des échanges, de réserve de valeur et d'unité de compte. La stabilité monétaire est un élément de la stabilité financière dans son ensemble.

La stabilité financière, au sens de stabilité du système financier, renvoie, en réalité, non seulement à l'absence de crise, mais aussi à la capacité du système à prévenir l'apparition de tels éléments déstabilisateurs, à contenir leur portée, et à éviter qu'ils ne mettent en péril l'activité économique générale lorsqu'ils se produisent. Comme le souligne Freixas<sup>1</sup>, elle peut être vue comme un bien public, dans la mesure où l'instabilité financière en général, et bancaire en particulier, réduit le bien être de l'économie dans son ensemble. Les faillites bancaires par exemple affectent les déposants non informés, elles détruisent de l'information sur les clients de la banque<sup>2</sup>, et peuvent créer un effet

---

<sup>1</sup>Conférence plénière de l'AFSE, Strasbourg 11 mai 2006.

<sup>2</sup>Ainsi, lors de la faillite de la Continental Illinois, on a pu observer une baisse marquée du cours des actions des entreprises financées par cette banque, ce qui tend à souligner que la relation bancaire a une valeur tant pour la banque que pour ses clients.

de domino. Garantir la stabilité financière impose donc tant des éléments de prévention, qui peuvent prendre la forme de mécanismes institutionnels, que des interventions qui peuvent être nécessaires pour rétablir le bon fonctionnement du système financier dans son ensemble une fois la crise enclenchée.

L'une des questions clé est alors celle de la mesure de l'ampleur de la déstabilisation financière, selon qu'elle touche une plus ou moins grande partie du système financier, que ses conséquences en dehors de la sphère financière soient plus ou moins significatives, que la volatilité des marchés qui en découle soit plus ou moins forte.

Au final, c'est la notion de risque systémique qui permet d'appréhender le mieux ces différents aspects. En son sens le plus général, le risque systémique ne se limite pas à la sphère économique et financière. Il apparaît en médecine, avec l'épidémiologie, en physique, ou en chimie avec la notion de réaction en chaîne. Il englobe tous types d'événements dont les effets locaux ont une capacité à se propager pour affecter une grande partie d'un système qu'il soit composé de malades, d'éléments physico-chimiques, ou d'agents financiers (banques, institutions et intermédiaires financiers...). En suivant De Bandt et Hartmann (2000), on peut distinguer plusieurs éléments pour définir les contours du risque systémique.

On peut, tout d'abord, se pencher sur la notion d'événement systémique, " événement, comme la révélation d'une mauvaise nouvelle concernant une institution financière, sa faillite, ou un krach boursier, conduisant à un enchaînement séquentiel d'effets négatifs sur une ou plusieurs autres institutions financières ou sur d'autres marchés. " Cette définition est proche de celle que donne le groupe de travail du G10 sur la consolidation financière (2001) de la même notion. Le G10 définit ainsi un événement systémique comme : " [un] événement qui conduit à une perte de richesse ou de confiance pour une partie substantielle du système financier et dont les effets sur l'économie réelle sont de grande ampleur. " A la précédente définition au sens strict, Hartmann et De Bandt ajoutent une définition au sens large qui adjoint aux enchaî-

nements précédents les " effets négatifs simultanés sur un grand nombre d'institutions ou de marchés suite à des chocs importants et étendus (chocs systémiques). "

De Bandt et Hartmann définissent, ensuite, une crise systémique comme " un événement systémique qui affecte un nombre considérable d'institutions ou de marchés. " Le risque systémique peut, dès lors, être défini en suivant ces auteurs, comme " le risque de faire face à un événement systémique au sens strict. "

On trouve donc ici les deux éléments clés de l'instabilité financière : d'une part, un choc sur le système financier ou le système économique, et d'autre part un mécanisme de propagation du choc au long du système.

Enfin, la nature des chocs possibles est variée. Elle va de la faillite isolée d'un établissement bancaire, à des chocs systémiques étendus sur une partie ou l'ensemble du système bancaire et financier. La seule occurrence d'une faillite localisée ne permet pas de parler de crise financière ou de crise systémique. Ce n'est qu'à partir de la mise en œuvre du mécanisme de propagation qu'il est possible de le faire. La propagation peut prendre la forme d'une contagion d'un établissement financier à un autre, c'est à dire d'un enchaînement de faillites. Elle se manifeste également au travers de l'accélérateur financier qui amplifie les chocs réels et financiers et permet aux difficultés de la sphère financière d'affecter l'économie réelle.

L'histoire financière est émaillée d'événements systémiques fréquents : faillites bancaires, défauts de contreparties, chocs de liquidité lors desquels un problème systémique s'est propagé vers des institutions bancaires qui n'étaient pas soumises aux difficultés initiales... Au final, on peut distinguer deux types d'événements systémiques dans le passé récent. Les premiers sont les chocs affectant directement un ensemble d'établissements, les seconds sont des chocs localisés avec une forte propension à se propager.

Les chocs systémiques étendus ont été nombreux, on peut penser, par exemple, au sauvetage des caisses d'épargne aux Etats-Unis au cours des années 1980 ; aux difficultés des banques japonaises dans décennie 1990 suite au dégonflement de la bulle

immobilière et financière ; à la crise mexicaine de 1994 qui a frappé durement les marchés obligataires et renchérit le coût des ressources bancaires, par l'effet désormais connu sous le nom d'effet " tequila ", tout en fragilisant les banques prêteuses les plus engagées comme Citibank ; ou encore aux faillites d'institutions bancaires en Asie du Sud Est lors de la crise de 1997 - 1998.

On compte aussi de nombreux et célèbres épisodes où des difficultés localisées ont eu des conséquences systémiques. On pourrait ici citer une longue liste d'événements, mais on se cantonnera aux plus marquants comme la faillite de la Herstatt Bank en 1974, la crise de liquidité de la Bank of New York en 1985, la crise des banques scandinaves en 1992, sans oublier la faillite retentissante de LTCM en 1994... Tous ces événements ont mis en péril le fonctionnement des systèmes interbancaires au point d'imposer des interventions diverses des autorités monétaires, ou de l'Etat. Un système entier de règlement (clearing system) a même été conduit à la faillite en 1982 avec la disparition du marché d'Al-Manakh au Koweït : la compensation de 29 000 ordres de paiements postdatés de négociateurs de marché a été rendue littéralement impossible du fait de la chute de 45% du marché boursier.

Cette définition de la stabilité financière ouvre donc un champ d'analyse particulièrement vaste. Elle recouvre, en effet, la spécification de l'événement déstabilisateur, ou de " l'événement systémique ", ainsi que l'analyse des canaux de propagation réels et financiers. Elle implique le système financier dans son ensemble, tant les banques que les marchés. Elle englobe des questions de stabilité du système financier par lui-même et des questions de stabilité macro et micro-économique réelles.

Cependant, quels que soient les cas considérés, ou la nature des enchaînements étudiés, il apparaît tant dans les faits que dans la littérature, que les banques jouent un rôle particulier dans la notion de stabilité financière. En effet, elles sont le pivot du système financier et partant, de la stabilité de celui-ci. Elles sont également au coeur de la transmission possible des difficultés de la sphère financière vers la sphère

réelle. Reinhart et Kaminsky (1999) soulignent ainsi que la concomitance des crises bancaires et des crises financières de balance des paiements apparaît comme un fait stylisé caractéristique d'une majorité de crises. La causalité entre ces deux types de crises est à double sens : la crise bancaire peut être un élément déclenchant de la crise financière, comme la crise financière peut déclencher la crise bancaire. Les résultats de l'étude empirique menée par ces auteurs sur 76 crises monétaires et 26 crises bancaires de 1970 à 1995 dans les pays émergents comme dans les pays développés en témoignent. Sur les 26 crises bancaires étudiées, 18 ont été précédées d'une libéralisation du secteur financier au plus tard 5 ans avant le déclenchement de la crise, c'est le cas également pour 71% des crises de balance des paiements. On constate une accélération de la hausse du multiplicateur  $M2^3$  de 20% dans les périodes précédant immédiatement la crise bancaire. Le ratio rapportant la croissance du crédit domestique à celle du PIB<sup>4</sup> nominal connaît une hausse de plus en plus soutenue à mesure que l'on approche de la crise. Ces résultats soulignent la place particulière des banques dans les épisodes d'instabilité financière.

L'analyse, au long de cette thèse, se concentrera donc sur la question de la stabilité du système bancaire et interbancaire. Plus spécifiquement, nous étudierons les mécanismes clé de l'instabilité bancaire liés au fonctionnement des marchés de liquidité et de dettes interbancaires que l'on peut décrire comme des réseaux financiers. Les banques sont en effet de plus en plus fréquemment impliquées dans des systèmes de paiements en réseau comme les systèmes de règlement - livraison de titres ou les systèmes de compensation, fonctionnant comme des réseaux décentralisés d'échanges

---

<sup>3</sup>Outre les moyens de paiement utilisables directement dans le règlement des transactions (agrégat M1), M2 comprend les placements à vue non utilisables pour les paiements par chèque.

<sup>4</sup>Produit Intérieur Brut



de fonds, tels CHIPS<sup>5</sup> et FedWire aux Etats-Unis, CIS<sup>6</sup> en Suisse, GSIT en France<sup>7</sup>, ou les systèmes de paiements européens STEP1 et STEP2 mis en place par l'Association des Banques Européennes. Ces systèmes de paiements ou d'échanges de dette constituent des réseaux de relations financières liant les institutions bancaires. De fait, il est possible de parler d'architecture des réseaux interbancaires en faisant référence à la topologie de ces liens d'affaires unissant les banques.

Or, si la littérature économique s'est déjà largement penchée sur certains aspects de la stabilité du système bancaire, elle n'a jamais vraiment considéré les enjeux spécifiques représentés par la structure (ou la topologie) des liens interbancaires. Néanmoins, la structure des liens entre les banques est un élément clé dans deux dimensions au moins : celle de la gestion du risque de liquidité, et celle de la gestion du risque de faillite.

Bhattacharya et Gale (1987)<sup>8</sup> ont montré l'intérêt majeur de ces réseaux interbancaires pour les banques. Ils leur permettent, en effet, de réduire le montant des investissements dans les actifs liquides peu ou pas porteurs d'intérêt et d'accroître le montant des investissements dans les actifs à long terme. Cependant, les contributions diverses reprenant ce résultat, font toutes une hypothèse implicite quant à la topologie du réseau en place. Peu de contributions se penchent, à notre connaissance, sur l'influence de la topologie du réseau interbancaire sur sa capacité à gérer le risque de liquidité. Il s'agit en particulier de savoir si le réseau permet de distribuer la liquidité de manière efficace, c'est-à-dire afin de permettre à chaque intervenant de diminuer le montant de ses réserves liquides, tout en n'encourant pas de risque d'illiquidité.

---

<sup>5</sup>CHIPS, Clearing House Interbank Payments System, est un système de paiements interbancaires concurrent de FedWire, crée en 1970. Ce système de paiements en temps réel, détenu par un conglomérat bancaire, a recours à des méthodes de compensations bi-latérales et multi-latérales de transactions interbancaires commerciales. En 2004 CHIPS a traité plus de 270 000 paiements quotidiens pour une valeur totale de 1,4 trillion de USD.

<sup>6</sup>Compensation Interbancaire Suisse

<sup>7</sup>Le Groupement du Système Interbancaire de Télécompensation est un organisme privé regroupant les banques implantées en France et par lequel transitent toutes les opérations interbancaires de gros et de détail en France. Son volume d'affaires en 2004 a été de 599 milliards d'Euros.

<sup>8</sup>Ces résultats ont été repris par Rochet et Tirole (1996), Allen et Gale (2000) ou encore Freixas Parigi et Rochet (2000)

En outre, un système bancaire ne fait face à des faillites en chaîne qu'à la condition de réunir deux éléments clés : il faut que le système subisse un choc localisé ou généralisé, et que ce choc soit en mesure de se propager. Cette propagation est souvent décrite sous la métaphore de l'effet domino : la faillite d'un intervenant peut conduire à la faillite d'un grand nombre d'autres par la cascade de paiements les liant. Or, tout comme dans le processus physique de la chute de dominos, l'effet des cascades de paiements dépend clairement de la façon dont les dominos sont disposés les uns par rapport aux autres, autrement dit de la topologie, ou de l'architecture du réseau de paiements. Si la théorie économique a largement exploré la nature des chocs possibles et leurs conséquences, on est toujours à la recherche d'un cadre d'analyse pertinent en ce qui concerne le canal de propagation.

En réalité, deux questions-clé, au moins, restent en suspens. Ces deux questions sont le fondement de cette thèse. La première question qui se pose est la mesure de la capacité de différents réseaux à distribuer la liquidité de manière efficace, c'est-à-dire de manière à permettre aux intervenants de diminuer le montant des réserves liquides tout en se protégeant d'un risque de course à la banque. On s'interrogera donc sur les liens entre la structure des réseaux et la gestion du risque de liquidité. La seconde question est celle de l'influence du réseau sur l'ampleur d'une contagion, et d'une crise suite à un événement systémique. Il s'agira alors d'étudier les liens entre structure (ou topologie) de réseau et gestion du risque de faillite ou plus largement d'explorer le lien entre architecture de réseau et fragilités financières.

Ces questions placent cette thèse à la croisée de deux courants de littérature. Le premier est la littérature sur les fragilités bancaires, et le second la littérature sur les réseaux. Il sera donc nécessaire d'en proposer une synthèse dans un chapitre premier. Cette synthèse impose de classer les modèles existants. Pour ce qui est de la littérature sur les fragilités bancaires il faut d'une part considérer les modèles d'initiation de l'instabilité financière, c'est-à-dire ceux qui s'attachent à mettre en lumière l'apparition

des chocs initiaux en mesure de déclencher la crise que De Bandt et Hartmann désignent comme " événements systémiques ". Il faut, d'autre part, considérer les modèles de propagation des événements systémiques entre les banques. A partir de cette analyse sur les fragilités bancaires, nous verrons, dans ce premier chapitre, en quoi la littérature sur les réseaux, et, les outils de la théorie des graphes sur lesquels elle repose, peut constituer une amélioration substantielle par rapport aux modèles de base. Ce courant de littérature, qui s'appuie sur des éléments théoriques forts, a connu ses premières applications sur l'analyse des réseaux sociaux et de leurs implications en particulier sur le marché du travail. Leur utilisation en finance ou en économie financière et bancaire n'est que peu développée, même si quelques rares contributions, en particulier celles d'Allen et Gale (2000) et de Freixas et alii (2000) commencent à y avoir recours.

Dans un chapitre second, nous nous attacherons à déterminer l'influence de la structure du réseau sur sa capacité à distribuer la liquidité tout en réduisant le montant des réserves liquides détenues par ses membres pour gérer le risque de liquidité auquel les établissements sont confrontés. Il s'agit de lever l'hypothèse implicite d'équivalence de toutes les topologies de réseaux interbancaires dans leur capacité à gérer les chocs de liquidités qui est faite traditionnellement par la littérature. Le modèle, auquel on a recours ici est dérivé de Allen et Gale (2000). Ce modèle, qui a encore été peu utilisé, est particulièrement bien dessiné pour intégrer fragilités bancaires et réseaux, si on lui apporte quelques extensions. Ce chapitre montrera, ainsi, que l'intégration à un tel réseau permet de réduire le montant des réserves liquides et par suite de décentraliser l'allocation Pareto optimale. Cependant, ce résultat dépend clairement de la structure ou de la topologie du réseau, du nombre de participants et de la structure des coûts. Dans un réseau sans coûts, le réseau doit avoir des caractéristiques précises afin d'atteindre ce résultat : il doit exhiber une propriété de " petit monde " qui implique que les banques sont liées deux à deux par une très courte chaîne d'intermédiaires, ou il doit exhiber une propriété de régularité stricte. Dans un réseau avec coût, une unique

structure permet de décentraliser l'allocation optimale sans faillite et de minimiser les coûts agrégés. Cependant, une telle structure n'est pas stable deux à deux car les coûts y sont inégalement répartis. Il apparaît ainsi, que toutes les structures ne sont pas équivalentes. Néanmoins, la classe des réseaux qui sont dotés de cette capacité est relativement étendue.

C'est pourquoi dans un chapitre troisième nous évaluerons l'efficacité relative des différents réseaux dans le rythme de la distribution de la liquidité entre les intervenants. Ce chapitre repose sur un ensemble de simulations sous Gauss, et sur des outils d'évaluation numériques des propriétés des structures de réseaux obtenues par UCI-NET. Dans ce but, on mesure différents critères d'efficacité des réseaux. On sera ainsi en mesure de montrer que le réseau en étoile permet de décentraliser l'allocation Pareto optimale dans le temps le plus court. Dans les réseaux relativement grands, l'influence de la taille des voisinages sur l'efficacité temporelle est non significative. Elle est en revanche notable dans les réseaux relativement plus petits. En outre, plus la taille du voisinage est réduit, plus le nombre moyen de banques illiquides à la fin de chaque période est faible. On verra donc que la structure d'adjacence du réseau est un critère essentiel de l'efficacité.

Enfin, l'état de la littérature sur les fragilités interbancaires et la contagion systémique considère trop rarement l'effet de la structure sur l'ampleur possible de la contagion. Nous allons dans un chapitre quatrième proposer de combler cette lacune. Nous verrons, ainsi, que l'architecture du réseau est non neutre pour les risques auxquels les banques s'exposent. Face à un événement systémique localisé (comme la faillite non anticipée d'un établissement bancaire), l'ampleur de la contagion et la profondeur de la crise, mesurée par le nombre de banques en faillite et le total d'actifs liquidés par anticipation, dépend clairement de la topologie du réseau. En particulier, il apparaît que l'ampleur de la contagion est une fonction croissante de la connectivité du réseau. Plus la connectivité du réseau est forte, plus le nombre d'institutions touchées,

et la vitesse de propagation de la contagion sont élevées. En outre, plus les voisinages, c'est-à-dire le nombre de banques partenaires, est grand, plus la crise, mesurée par le nombre d'institutions en faillite est étendue. En revanche, la longueur des chemins liant les intervenants, la valeur des réserves liquides, ou la valeur de liquidation des actifs apparaissent comme des facteurs réducteurs de l'ampleur de la crise.



# Chapitre 1

## Fragilités bancaires et réseaux financiers, une revue de la littérature

## Introduction

Cette thèse repose sur une idée simple : prendre en compte la topologie<sup>1</sup> des réseaux liant les intermédiaires financiers permet de mieux appréhender la gestion du risque de liquidité, et la gestion du risque de faillite. Ce travail est donc une contribution versée à l'analyse des risques bancaires et financiers s'appuyant sur des outils issus de la théorie des réseaux. Il est nécessaire, dans un premier chapitre, de tracer un panorama de la littérature selon ces deux axes en insistant sur les premières convergences existant entre les deux courants. Aussi, nous proposons dans une première section, une recension des modèles de fragilités bancaires aussi synthétique que faire ce peut vu l'abondance des contributions qui ont suivi le modèle fondateur de Diamond et Dybvig (1983)<sup>2</sup>. Puis dans une seconde section, nous proposons une synthèse de la littérature sur les fragilités financières qui a recours à la théorie des réseaux comme facteur explicatif des crises. Se pencher sur une synthèse de la littérature sur les réseaux, en tant que telle, nous éloignerait par trop du coeur de notre sujet, c'est pourquoi nous nous concentrerons sur ce seul volet de la littérature.

### 1.1 Les modèles de fragilité bancaire

#### 1.1.1 Les modèles fondateurs à une seule banque

Les modèles de fragilités bancaires provenant d'un défaut de coordination partagent une filiation directe avec les contributions-clé de Diamond et Dybvig (1983) et Bryant (1980).

Ces articles mettent en évidence la fragilité inhérente au métier bancaire. Les banques, en effet, se financent à court terme en émettant des contrats de dépôts de valeur fixe, alors que leurs emplois prennent la forme de prêts à long terme à l'écono-

---

<sup>1</sup>au sens d'architecture

<sup>2</sup>Notons que, dans ces modèles, les structures postulées ne laissent pas de place à la banque centrale [exception faite de Bhattacharya et Gale (1987) et Freixas Parigi Rochet (2000)]. Celle-ci n'intervient que ex-post comme une réponse institutionnelle à diverses défaillances de marché.



mie. Il y a donc un décalage de maturités entre les actifs et les passifs. Ce déséquilibre fondamental des maturités est tout à la fois la raison d'être du métier bancaire et la source potentielle des fragilités bancaires en raison du risque de courses à la banque qu'il comporte.

Le cadre du modèle de Diamond et Dybvig (1983) est relativement simple. Dans une économie qui connaît trois dates  $t = 0, 1, 2$  existent deux types de consommateurs. Une certaine proportion d'agents est précoce. Ces derniers ne retirent d'utilité que de la consommation de première période (ce sont les consommateurs impatientes). Une proportion complémentaire d'agents est constituée de consommateurs tardifs qui ne retirent d'utilité que de la consommation de seconde période (ce sont les consommateurs patients). Ces proportions sont fixes et connues dès l'origine des temps. En revanche, le type de chaque agent est une information privée qui n'est révélée qu'en  $t = 1$ , date à laquelle se réalise le choc de préférences. L'investissement n'est possible que lors de la période  $t = 0$ . Il existe dans l'économie deux supports à l'investissement, l'un est un actif liquide qui ne porte pas intérêt, l'autre est un actif illiquide. Une unité investie dans cet actif en  $t = 0$  produit  $R > 1$  unités en  $t = 2$ . Cette illiquidité n'est pas complète dans la mesure où l'actif peut être liquidé à la date intermédiaire. Cette liquidation anticipée a un coût car, en ce cas, la valeur de liquidation n'est que  $r < 1$ .

En restant en autarcie, les agents qui investissent en  $t = 0$  dans l'actif long sont soumis au risque de devoir liquider de manière anticipée leurs investissements s'ils s'avèrent être impatientes en  $t = 1$ . Ils enregistrent une perte, et, leur consommation est moindre que celle des agents impatientes n'ayant pas investi, elle même inférieure à la consommation des agents patients ayant investi. Sous certaines conditions, ceci peut conduire à une absence d'investissement dans l'économie.

Dès lors, il est dans l'intérêt des agents de se regrouper pour constituer des banques mutualistes capables de leur offrir une assurance contre le fait d'être impatient. Ainsi, une banque qui demande des contrats de dépôts est en mesure de garantir un partage

des risques optimal. En effet, les proportions de chaque type de consommateur étant connues et fixes, il est possible pour une banque de faire jouer la loi des grands nombres pour ne conserver en réserves liquides que le montant nécessaire à la consommation des agents précoces tout en investissant le solde dans l'actif de long terme. La situation avec banque est donc Pareto supérieure à celle de l'autarcie.

Cependant, si à la date intermédiaire, une proportion d'agents plus grande qu'initialement prévue vient retirer ses fonds, la banque est contrainte de liquider de manière anticipée ses actifs longs pour faire face aux demandes des déposants. Cette liquidation anticipée réduit la quantité d'actifs disponibles pour les agents patients. Les agents étant servis au guichet selon une règle de " premier arrivé, premier servi ", le contrat de dépôt est à la source de complémentarités stratégiques. Le rendement de l'action d'un agent est, en effet, une fonction croissante du nombre d'autres déposants réalisant la même action. Il y a donc deux équilibres de Nash dans ce jeu. L'un est un " bon " équilibre qui assure le partage optimal des risques, l'autre est un " mauvais " équilibre dans lequel les déposants patients décident de retirer précocement leurs dépôts. Cette course à la banque supprime le partage des risques, et conduit à la liquidation anticipée de tous les actifs productifs dans l'économie. La stabilité bancaire dépend donc non seulement de la capacité des banques à sélectionner des projets d'investissement rentables, mais aussi, de la confiance des déposants. Cette caractéristique fondamentale, mise en évidence par l'article de Diamond et Dybvig (1983), est un trait particulier de l'industrie bancaire qui n'est pas partagée par les autres intermédiaires financiers comme le mettent en évidence Goodhart et alii (1998).

Ces courses à la banque sont des prophéties auto-réalisatrices liées à un défaut de coordination. Bien que rationnelles, elles n'en restent pas moins inefficaces. La situation des agents serait Pareto supérieure si la course à la banque n'avait pas lieu. La solution envisagée pour éviter que les agents ne se coordonnent sur l'équilibre de crise est l'instauration d'une assurance dépôt à l'image de ce qui a été le cas aux Etats-Unis

dès 1935 avec le FDIC<sup>3</sup>. Assurés de conserver la valeur de leurs dépôts jusqu'à la date de retrait, les agents patients n'ont plus intérêt à se livrer à des retraits anticipés. La stabilité bancaire est alors assurée. Une autre solution envisagée par Jacklin (1987) consiste à substituer des actions aux contrats de dépôts. Cependant, cette substitution se fait au prix d'un moindre partage des risques que dans le cas de l'émission de contrats de dépôts.

Une première variante à ce modèle séminal de course à la banque a été apportée en levant l'hypothèse de prophétie auto-réalisatrice pour considérer des courses à la banque " efficaces " dans le sens où elles sont consécutives à la révélation d'une information nouvelle sur la nature des actifs de la banque.

Chari et Jagannathan (1988), et Jacklin et Bhattacharya (1988) sont les modèles fondateurs dans cette veine, dans lesquels le rendement de l'actif long est aléatoire. Dans ces contributions, l'information reçue par les agents est incomplète. Seuls certains agents reçoivent une information sur le rendement de l'actif long de la banque qui peut s'avérer moindre que prévu. Cette information peut alors conduire à une course à la banque " efficace " dans le sens où, contrairement à Diamond et Dybvig, elle n'est pas seulement issue d'un équilibre en tâche solitaire.

Ainsi pour Chari et Jagannathan (1988), l'économie fait face à un risque agrégé de liquidité à la période intermédiaire : le montant des retraits en  $t = 1$  est, en effet, aléatoire, alors qu'il était connu dans le modèle de base de Diamond et Dybvig (1983). La proportion d'agents impatientes est aléatoire. Les agents patients qui laissent leurs dépôts en banque jusqu'à la date terminale se partagent les profits réalisés par celle-ci. le rendement de l'actif long est nul si celui-ci est liquidé avant terme. Au sein de la sous population d'agents patients, une certaine proportion (les agents informés) reçoit une information parfaite sur le niveau de rendement futur de l'actif long. Cette information détermine la décision de ces déposants tardifs de maintenir ou non leurs dépôts. Ils retirent si le rendement futur est faible. La proportion totale d'agents informés n'est

---

<sup>3</sup>Federal Deposit Insurance Company

cependant pas une information publique. Ceci crée une incertitude quant à la nature des retraits en  $t = 1$ . Les agents patients mais non informés coordonnent leurs actions à partir de leurs observations sur la quantité de retraits à la date intermédiaire. Partant, lorsque les agents non informés observent un niveau élevé de retraits intermédiaires, ils ne peuvent savoir si cela provient d'une proportion forte d'agents impatientes dont la proportion est aléatoire, ou si cela provient de retraits d'agents patients mais informés d'un rendement futur faible de l'actif long. Les agents patients non informés infèrent de la longueur de la file d'attente au guichet que le rendement de l'actif long terme est faible. Il y a un problème d'extraction de l'information à partir de la " longueur de la queue observée à la banque ".

Dans l'article de Jacklin et Bhattacharya (1988) le rendement de la technologie de long terme est variable et une proportion d'agents tardifs dispose à la période intermédiaire d'une information avancée sur le niveau du rendement futur. Comme dans le modèle de Chari et Jaganathan (1988) selon l'information reçue, les agents tardifs informés peuvent préférer anticiper leurs retraits en  $t = 1$ . En ce cas la banque ne dispose pas d'assez de fonds liquides pour faire face en  $t = 1$  aux retraits des déposants précoces et à ceux des déposants tardifs anticipant leur retraits. La banque est en cessation de paiements. Elle est, de fait, conduite à la faillite car la valeur de liquidation anticipée de l'actif long est nulle. Cet équilibre avec faillite est unique et ne résulte pas de prophéties autoréalisatrices. Les auteurs comparent alors les bénéfices [en terme de bien être] retirés par les déposants au sein d'économies dotées soit de contrats de dépôts soit de titres échangeables. L'économie avec contrat de dépôts dépasse en terme de bien être celle avec titres échangeables si les actifs longs portent un risque faible. En effet, le seuil au delà duquel les agents courent à la banque est inversement proportionnel à la variance du rendement de l'actif long. Les modèles de Calomiris et Gorton (1991), ou Alonso (1996) reposent sur des mécanismes similaires de ruée informée : les retraits soudains des déposants lors des périodes de crises sont des réponses informées des

déposants aux faiblesses financières bancaires individuelles.

Les questions d'information sont également à l'origine de deux contributions clé dans l'analyse des courses à la banque dans le cadre des " jeux globaux ". Il s'agit des contributions de Morris et Shin (2000) et de Goldstein et Pauzner (2004). L'article de Morris et Shin (2000) ne porte pas à proprement parler sur la banque mais sur les attaques sur le marché des changes, alors que celui de Goldstein et Pauzner (2004) reprend la structure de Diamond et Dybvig (1983). Nous nous concentrerons donc sur celui-ci. Ces auteurs ajoutent deux éléments : une dépendance du rendement de l'actif de long terme au niveau réalisé des fondamentaux (état de la nature), et un signal parfait reçu par les agents sur le niveau futur de ces derniers. Selon le signal reçu, il existe trois zones d'équilibres distincts. Sous un signal bas, qui constitue un seuil inférieur des fondamentaux, il est optimal pour tous les agents patients de retirer leurs dépôts quelle que soit l'attitude des autres. Au-delà d'un signal haut, qui constitue un niveau seuil supérieur, le niveau des fondamentaux futurs est si solide qu'il est optimal de maintenir ses dépôts à la banque quelle que soit l'action des autres agents. Dans ces deux zones, l'équilibre est unique avec ou sans course à la banque. Dans la zone intermédiaire, entre les seuils hauts et bas, les équilibres multiples perdurent. Le rendement de l'action d'un individu patient dépend de l'action des autres agents patients. L'équilibre peut être un équilibre de course à la banque ou un équilibre sans course.

Le problème d'indétermination de l'équilibre peut être levé par l'introduction d'un bruit sur le signal annonçant l'état futur de la nature. Le signal reçu par les agents sur l'état de la nature futur n'est pas parfait. Au signal fondamental s'ajoute un bruit statistique qui suit une distribution *iid* dans un intervalle symétrique restreint, si bien que les agents ne connaissent la valeur des fondamentaux qu'en espérance. Les agents sont alors en mesure d'inférer le comportement possible des autres agents à partir du signal bruité qu'ils ont eux-mêmes reçu. Dans ce cadre, Goldstein et Pauzner (2004)

montrent que les seuils hauts et bas sont confondus, et on fait face à un niveau seuil unique du signal en-deçà duquel il est toujours optimal de retirer, et au-delà duquel il est toujours optimal de rester investi. Le bruit sur le signal sert donc d'outil de coordination entre les agents patients. Le recours à la méthode des " jeux globaux " permet de lever la question de l'indétermination de l'équilibre qui était constatée dans le modèle de Diamond et Dybvig (1983).

### 1.1.2 Les modèles avec plusieurs banques

Le trait unifiant les modèles présentés dans la première section est le suivant : la course à la banque ne dépend que de la décision des déposants, et de problèmes de coordination entre eux. Il n'existe aucun lien de quelque ordre que ce soit entre les banques. Dans ce cadre, parler de propagation d'une course à la banque d'un établissement à un autre n'a guère de sens. Ces modèles initiaux ont naturellement été étendus à des modèles à banques multiples liées les unes aux autres par différents canaux. Une amélioration récente a été constituée par l'introduction de canaux de transmissions interbancaires dans lesquels les liens entre les banques sont modélisés par un recours à la théorie des graphes (cf. sections 1.1.3 et 1.2).

La contagion, peut être définie comme l'extension progressive de difficultés bancaires d'une institution à une autre jusqu'à toucher une partie significative ou l'ensemble du système bancaire. Elle ne correspond donc ni à la panique - il peut y avoir panique sans qu'il y ait nécessairement contagion -, ni à l'interdépendance entre les banques qui ne correspond pas à cette notion de propagation.

Ainsi, une crise bancaire peut se propager par de simples changements dans le sentiment des déposants comme l'accroissement de l'aversion au risque, la modification de l'interprétation donnée à des informations existantes, ou, un effet de révision des anticipations... Chez De Bandt (1995) qui étend Jacklin et Bhattacharya (1988) le système bancaire est ainsi soumis à un choc agrégé sur le rendement de l'actif long

et la transmission des courses à la banque repose sur un mécanisme de révision des anticipations des déposants.

Temzelides (1997) réalise une extension de Diamond et Dybvig (1983) en deux sens : au sens vertical, il envisage une version répétée dans le temps de Diamond et Dybvig (1983), et au sens horizontal, il envisage un cadre à plusieurs régions. Dans cette version répétée de Diamond et Dybvig (1983), les agents apprennent de leurs expériences passées. Cet effet d'apprentissage au cours du temps crée des effets de persistance d'un des deux équilibres de Nash (panique / stabilité). Le croisement de ces deux extensions se traduit de la sorte : l'observation des paniques bancaires dans certaines régions lors d'une période peut conduire, selon un mécanisme en réalité proche de celui de Chari et Jagannathan (1988) à des équilibres de paniques dans d'autres régions à la période suivante.

Chen (1999) propose un modèle de synthèse dans la mesure où deux mécanismes y sont à l'oeuvre : le premier tient à une corrélation dans le rendement de l'actif long terme entre les banques, le second à une révision bayésienne des anticipations de la part des déposants. Dans ce modèle, l'auteur considère  $N$  banques, mais celles-ci ne sont liées par aucune relation de crédit. On est dans une économie à trois périodes comme chez Diamond et Dybvig (1983). Chaque banque investit dans un actif risqué dont la probabilité de succès est inférieure à un. Le rendement des actifs entre les banques est corrélé, dans la mesure où l'état de la nature, commun à toutes les régions, conditionne la probabilité de succès du projet. Chen distingue au sein de la période intermédiaire deux sous-périodes lors desquelles les déposants ne disposent pas tous des mêmes informations. Dans la première sous-période, une fraction de déposants d'un sous-ensemble  $S_1$  de banques, de cardinal  $(n)$ , reçoit un signal sur le rendement futur de l'actif risqué de leur banque. Cette information est révélée en même temps que le sont les préférences de chaque agent. En parallèle, les déposants des banques du sous ensemble complémentaire,  $S_2$  de cardinal  $(N - n)$ , n'ont reçu aucune information,

ni concernant les préférences, ni concernant le rendement futur de l'actif risqué.

Dans la première sous période, les faillites bancaires dans le sous ensemble  $S_1$  sont dirigées par l'information avancée sur le niveau de rendement des actifs futurs, ce sont donc des courses informées à la banque. Dans la seconde sous période, selon le niveau des faillites dans le premier sous ensemble, c'est-à-dire selon le niveau de retraits dans les  $n$  premières banques, les déposants des banques du sous ensemble  $S_2$  révisent leurs anticipations sur le niveau de rendement futur de l'actif dans les banques où ils ont réalisé leur dépôt. Cette révision bayésienne peut alors conduire à une course généralisée sur l'ensemble des  $(N - n)$  banques du sous-ensemble. Les agents non informés infèrent du comportement des agents informés dans les  $(n)$  premières régions que le rendement de l'actif long sera faible. Cet équilibre se réalise sans que les déposants de  $S_2$  n'aient reçu une information quelconque. On est donc face à une extension progressive des retraits anticipés de banque à banque tant en raison de la règle de paiement des déposants (premier arrivé, premier servi) que du fait de la révision des anticipations des agents sur les fondamentaux de l'économie à partir du nombre de faillites observées.

L'interdépendance entre les banques passe non seulement par l'exposition au marché interbancaire et la valeur des titres détenus, mais aussi par un canal de crédit et de liquidité disponible sur le marché.

D'une part, en effet, si une banque détient des titres sur une banque en faillite ou en difficulté et réalise des pertes, elle peut alors vendre ses actifs sur d'autres banques afin de restaurer ses ratios capitalistiques. En outre, face à des difficultés localisées en un point du portefeuille, les techniques de management des risques peuvent conduire les investisseurs à réduire leur exposition au risque global interbancaire dans son ensemble. C'est ainsi qu'une crise localisée sur une banque particulière peut conduire à une extension rapide de la crise par un simple effet de ré-allocation des portefeuilles souligné par Wolf (1999) dans les crises financières internationales.



D'autre part, une crise bancaire localisée peut également être à l'origine d'une réduction de la liquidité disponible sur les marchés interbancaires qui peut empêcher une banque illiquide, mais solvable, de lever les fonds dont elle peut avoir besoin à court terme, et ce, même auprès de banques solvables et liquides.

Le marché interbancaire peut conduire à des comportements de passagers clandestins de la part des banques qui sous provisionnent le montant de liquidité en réserve. La seule fonction du marché interbancaire est de distribuer la liquidité, créée ou détenue par ailleurs entre les intervenants. Si les banques ont une confiance excessive dans la capacité du marché à absorber des chocs transitoires de liquidité, elles peuvent détener des actifs liquides à un niveau trop faible, et un manque de liquidité agrégé peut apparaître sur le marché interbancaire. Ce mécanisme est développé dans le modèle de Bhattacharya et Gale (1987). En présence d'asymétrie d'information, le marché interbancaire peut conduire à un sous provisionnement de liquidité par les différentes parties prenantes du fait d'un comportement de passager clandestin. Dans ce modèle, les banques ouvrent un marché interbancaire pour se couvrir mutuellement contre des chocs individuels de liquidité. L'illiquidité de l'actif long terme est complète. Ce marché permet donc aux banques de réduire le montant de leur réserves liquides, coûteuses car non porteuses d'intérêt. Cependant, la décision d'investissement de chaque banque est une information privée. En conséquence, se pose un problème d'aléa moral et les banques conservent une quantité réduite d'actifs liquides. Par suite, la liquidité agrégée disponible sur le marché est insuffisante par rapport aux besoins. Elle est inférieure au niveau d'équilibre en information complète qui donne l'optimum.

En ce cas, la présence d'un marché interbancaire est la source du sous provisionnement des réserves liquides du fait des comportements de passager clandestin. Il peut être dès lors le médium de transmission des difficultés entre les banques. En effet, lorsque les banques font face à une demande de liquidité supérieure au montant des réserves dont elles disposent, elles sont confrontées à l'alternative suivante : soit elles

liquident leurs actifs longs<sup>4</sup>, pour obtenir, en interne, le montant de liquidité nécessaire ; soit elles tentent d'obtenir ces liquidités en externe en se tournant vers le marché interbancaire. Sur ce dernier les banques peuvent tenter d'obtenir un prêt, ou, liquider les créances dont elles disposent sur d'autres banques. Le choix ultime est guidé par le coût relatif d'obtention des ressources nécessaires. C'est sur ce type de mécanisme que reposent les effets de dominos présentés, par exemple, dans le modèle d'Allen et Gale (2000) que nous présentons en section 1.2. Notons que cette interdépendance ne se limite pas au marché interbancaire : les déposants d'une banque en crise peuvent ainsi faire l'expérience d'un effet de richesse négatif qui peut être à l'origine de retraits de leurs dépôts dans d'autres institutions comme c'est le cas chez Garber et Grilli (1989).

### 1.1.3 Éléments empiriques les fragilités interbancaires

Deux approches sont utilisées pour mesurer la contagion de manière empirique.

Une première approche tente d'isoler la contagion des autres chocs affectant l'économie. Elle simule donc les conséquences liées à la faillite initiale d'un établissement bancaire en prenant en compte l'exposition – estimée ou observée – des banques au marché interbancaire. L'effet de domino est constitué de l'enchaînement des faillites sur plusieurs périodes subséquentes. C'est sur cette méthode que s'appuie la contribution de Maurer et Sheldon (1998) sur le marché interbancaire suisse pour mesurer l'ampleur du risque systémique.

Leurs résultats montrent que la contagion passant par le canal interbancaire est potentiellement faible bien que la faillite d'une " grande " banque suisse soit en mesure d'avoir des implications élevées. Pour Upper et Worms (2002) qui appliquent cette même technique sur le marché interbancaire allemand, la contagion ne se limite pas à un petit nombre d'établissements, les plus petits ou les plus fragiles. La contagion, selon leurs estimations, est en mesure de toucher une part non négligeable du mar-

---

<sup>4</sup>Cette liquidation n'a pas de sens dans le cas particulier du modèle de Bhattacharya et Gale (1987) car la valeur de liquidation anticipée de l'actif long est nulle.

ché interbancaire allemand, même si celle-ci voit son ampleur limitée par un certain nombre de sécurités. La faillite d'une seule grande banque allemande peut conduire à la disparition de 15% du total des actifs du système bancaire. Dans une étude similaire sur le marché interbancaire britannique, Wells (2002) démontre que la contagion n'est possible qu'à la condition qu'une grande banque avec une bonne notation soit en cessation de paiements. Furfine (2003), à partir de données sur les expositions interbancaires sur le marché des Fonds Fédéraux américains souligne que la probabilité de faillite en chaîne est très faible dans la mesure où les actifs agrégés des banques en faillite ne dépasse jamais 1% du total des actifs des banques commerciales. Cifuentes (2003) simule, lui, le risque de contagion sur le marché interbancaire chilien. L'auteur démontre que ce risque augmente avec la concentration du système bancaire.

Une deuxième approche estime le risque de contagion en prenant en compte un plus large ensemble de chocs possibles. Elsinger et al. (2002) simulent l'influence de trois chocs joints (sur les taux d'intérêts, sur le taux de change, et une forte volatilité sur les marchés financiers) sur les flux de paiements interbancaires pour les banques autrichiennes. Ces chocs déterminent tant la valeur nette de chaque banque que la faisabilité des paiements interbancaires. Ils distinguent deux types d'insolvabilité : la première est issue de l'exposition aux différents chocs, c'est donc une exposition directe ou de premier ordre, alors que la seconde est issue de l'effet domino, c'est donc une exposition indirecte ou de second ordre. Les simulations de faillites des banques suite aux chocs joints indiquent que, bien que la probabilité de défaut en chaîne (contagion) soit faible par rapport à la probabilité totale de défaut, dans certains cas la contagion est responsable de 75% des faillites. Leurs simulations proposent également deux types de structures pour le marché interbancaire : l'une dans laquelle la structure est complète, c'est-à-dire un cas dans lequel chaque banque est liée à toutes les autres, et l'autre dans laquelle la structure est incomplète, c'est à dire un cas dans lequel chaque banque n'est liée qu'à une partie des autres banques. Leurs résultats montrent que la contagion est

plus forte dans le cas d'un réseau complet que dans le cas d'un réseau incomplet. Ce résultat est très intéressant dans la mesure où il vient, semble-t-il, affaiblir les résultats standard sur les effets de diversifications selon lesquels le risque décroît avec le degré de diversification du portefeuille. Ils se posent également en opposition aux résultats théoriques de Allen et Gale (2000)

Lehar (2003) s'intéresse, quant à lui, à la corrélation entre les portefeuilles de banques. Cette corrélation estimée permet de calculer différentes mesures pour le risque systémique pour un ensemble de banques qui peuvent être liées tant directement par des relations interbancaires bilatérales que de manière indirecte par la similarité de leurs portefeuilles, ou, par la présence en portefeuille d'actifs soumis à des risques identiques. Un certain nombre d'articles montrent, à partir d'échantillons tirés d'épisodes historiques de faillites bancaires multiples, que les faillites bancaires sont clairement autocorrélées. Ainsi, Calomiris et Masson (2000) montrent, à partir de test de survivance temporelle lors de la Grande Dépression, que des fondamentaux nationaux régionaux et bancaires communs expliquent largement les faillites bancaires. Gropp et Vesala (2003) utilisent les propriétés des queues de distribution de la distance au défaut<sup>5</sup> pour étudier le risque de contagion dans un modèle où les expositions au marché interbancaire sont tant nationales qu'internationales. Pour le cas européen, la contagion existe à ces deux niveaux, même si la contagion nationale l'emporte sur la contagion internationale. L'introduction de l'Euro a, selon ces auteurs, sensiblement accru le risque de contagion internationale au sein des pays de la zone. Angelini, Maresca et Russo (1996) se penchent sur le risque empirique d'effet domino dans le système italien de paiements interbancaires. Ils simulent la faillite d'un participant au réseau et en mesurent les effets au long du réseau de paiements. Leurs résultats contrastent largement avec ceux de l'étude de Humphrey (1986) sur le système CHIPS aux Etats-Unis. Ce

---

<sup>5</sup>La distance au défaut est définie à partir du modèle de Black et Scholes (1973). Ce dernier détermine l'évolution temporelle de la valeur de marché d'un actif selon un processus stochastique. Le point de défaut est la valeur de l'actif pour laquelle la banque disparaît. La distance au défaut est le nombre d'écarts types qui sépare la valeur des actifs de la banque du point de défaut.

dernier montre en effet que la faillite d'un établissement est en mesure de conduire à la faillite de 37% des participants au réseau représentant 30% des balances débitrices journalières. Le réseau italien de paiements interbancaires semble, selon les résultats de Angelini et alii (1996) beaucoup plus robuste puisque seuls 4% des participants ont une taille suffisante pour causer une crise systémique. En outre, en ce cas, moins de 1% des participants fait défaut pour des raisons systémiques, et les pertes ne représentent que 3% des flux de paiements journaliers. Le phénomène de contagion mis en évidence par Angelini et alii (1996) est beaucoup plus restreint dans le sens où seule la faillite de 9 ou 10 " grandes " banques est en mesure de représenter, par leur effet combiné, un événement systémique d'ampleur suffisante pour conduire à des faillites en chaîne. Ces résultats sont sans doute liés aux caractéristiques particulières du système italien de paiements interbancaires marqué par une relative faiblesse des transactions par rapport aux autres pays développés, un grand nombre de petits intervenants sur le marché et une relative concentration des flux autour de quelques noeuds du système.

Mueller (2003) tente de combiner une approche en terme de réseau et une simulation mesurant le risque de contagion sur le marché interbancaire suisse. Son innovation repose sur la prise en compte d'une deuxième cause de contagion : celle-ci provient en effet non seulement de l'exposition au risque de crédit sur le marché interbancaire (diminution de la valeur des créances d'une banque sur les autres), mais aussi de la réduction de la liquidité disponible sur le marché interbancaire en cas de faillite d'un ou de plusieurs établissements. L'étude de l'influence du réseau sur le risque de contagion demeure cependant peu aboutie dans la mesure où Mueller exhibe des indicateurs de réseaux susceptibles de favoriser la contagion ou de la réduire, mais ne les exploite que rarement dans ses diverses simulations.

Dans la même veine, Degryse et Nguyen (2004) dans une étude empirique sur le risque de contagion sur le marché interbancaire belge sur la période 1993-2002 soulignent que la structure du marché interbancaire est un facteur déterminant pour mesu-

rer le risque et l'ampleur d'une contagion entre les intervenants bancaires. Ils montrent ainsi que le passage d'une structure complète dans laquelle toutes les banques sont liées les unes aux autres à une structure avec centres monétaires multiples (où certaines banques jouent le rôle de pivot en étant connectées à un grand nombre de banques, alors que ces banques pivots ne sont pas reliées entre elles<sup>6</sup>) conduit à une diminution du risque de contagion ainsi que de l'ampleur de la crise.

L'étude de la structure ou de la topologie des liens interbancaires pour évaluer le risque de contagion d'un événement systémique apporte donc, tant du point de vue théorique que du point de vue empirique, des explications nouvelles aux fragilités financières ou bancaires. Ce recours à des éléments de topologie est directement lié à l'utilisation d'éléments de la théorie des graphes, et de la théorie des réseaux qui a connu des développements récents très significatifs en économie, mais n'a encore que peu été appliquée en finance.

## **1.2 Théorie des réseaux et applications sur la fragilité financière**

### **1.2.1 Éléments sur la théorie des réseaux**

Une littérature florissante sur les réseaux se développe actuellement. Elle s'appuie sur des outils théoriques forts développés par Bala et Goyal (2000a et 2000b), Currarini (2002), Currarini et Morelli (2000), Dutta et Jackson (2002 et 2003), Dutta et Mutuswami (1997), Jackson (2003a, 2003b), Jackson et Watts (2001), ou Jackson et Wolinsky (1996). Ses principaux domaines d'application sont la transmission d'information sur les opportunités d'emplois comme dans les articles de Granovetter (1973), Calvo-Armengol (2003) ou Ioannides et Datcher Loury (2002) par exemple. Elle a également été utilisée dans l'étude du commerce des biens sur des marchés non centralisés par Corominas-Bosch (1999, 2004), Weisbuch, Kirman et Herreiner (2000), ou

---

<sup>6</sup>Cette dernière structure peut être interprétée en terme de graphes comme une structure d'étoiles interconnectées.

Wang et Watts (2002). Elle a permis de renouveler l'étude des alliances de R&D ou les accords anti-concurrentiels entre les entreprises (Bloch (2001), Belleflamme et Bloch (2002), Goyal et Joshi (2000)), ou encore l'étude des accords commerciaux internationaux (Goyal et Joshi (2001) ou Furusawa et Konishi (2002)). Il ne s'agit pas ici de tracer un panorama de la littérature sur les réseaux en tant que tel. L'importance de cette littérature fait d'une telle recension un exercice en soi. On se concentrera donc uniquement sur les contributions qui ont recours à des éléments de théorie des réseaux dans l'étude des fragilités financières.

### 1.2.2 Réseaux et fragilités financières

Comme nous l'avons vu dans la première section, des phénomènes d'externalités sont en mesure d'expliquer en partie la contagion. Cependant, ils ont été considérés jusqu'à lors comme des phénomènes globaux qui affectent uniformément les actifs, ou se transmettent uniformément sur les marchés interbancaires quelle que soit la nature ou la structure des liens. L'intégration de la structure des liens (ou topologie du réseau au sens d'architecture) constituant le réseau interbancaire, ou le réseau financier, apparaît comme une amélioration récente qui répond à cette lacune des modèles antérieurs.

C'est principalement via l'étude des systèmes de paiements interbancaires que la notion de réseau apparaît dans la littérature existante. Deux types de systèmes de paiements concurrents existent : les systèmes de paiements nets, et, les systèmes de paiements bruts (ou de gros) (RTGS Real Time Gross Settlement Systems). Dans un système de paiements nets, les échanges de flux n'ont lieu qu'à la fin de la journée de banque par un transfert de fonds de la banque débitrice vers la banque créditrice. Dans les systèmes de paiements de gros en revanche les échanges sont continus au long de la journée de banque pour chaque opération. Les systèmes de paiements de gros apparaissent comme plus coûteux dans la mesure où ils obligent les banques à disposer d'un montant de réserves oisives plus élevé afin de couvrir tous les paiements faits au long de

la journée. C'est le cas par exemple du système de Compensation Interbancaire Suisse (CIS). Aucun des deux systèmes (nets ou de gros) n'est exempt de risque systémique, car les systèmes de paiements de gros, où le risque est certes bien moins important, il existe des délais de paiements qui créent des positions débitrices et créditrices. Comme le soulignent Schoenmaker (1996) et Angelini et alii (1996) il existe un arbitrage risque / bénéfice entre ces deux systèmes. En effet, le système de paiements nets est moins coûteux, mais, il crée des balances créditrices et débitrices plus lourdes qui se révèlent être un terrain favorable pour la transmission d'un événement systémique. Le système de paiements bruts est plus coûteux, mais, conduit à des balances plus faibles. La difficulté de la mesure de cet arbitrage provient de la difficulté à estimer les probabilités de faillite et notamment l'envergure de la contagion.

On fait fréquemment référence en matière d'étude des fragilités financières à la métaphore de l'effet de domino. Or, en suivant cette métaphore, et de manière littérale, il est avéré que l'ampleur de la chute des dominos les uns derrière les autres dépend clairement de la façon dont ils sont disposés les uns par rapport aux autres. Partant, la structure ou la topologie du réseau est essentielle pour comprendre les phénomènes de contagion dans les réseaux interbancaires. Le recours à la théorie des réseaux pour analyser les fragilités financières représente une avancée encore peu exploitée.

Trois contributions essentielles s'attachent à ce sujet et intègrent des éléments de théorie des réseaux pour expliquer les fragilités financières. Il s'agit des articles d'Allen et Gale (2000), de Freixas, Parigi et Rochet (2000), et, de Lagunoff et Schreft (2001).

La contribution d'Allen et Gale (2000) vise à mesurer les effets liés aux prêts interbancaires face à un événement systémique. Leur cadre reprend pour l'essentiel celui de Diamond et Dybvig (1983) avec une structure identique pour les consommateurs et les technologies. Ils considèrent non une région avec une banque en monopole, mais quatre régions distinctes. Chaque région est dotée d'un continuum de banques identiques. Ils ne considèrent, dès lors, qu'une banque représentative par région. Les banques font face



à deux chocs de liquidité possibles à la période  $t = 1$ . Avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  le choc est haut (noté  $\omega_h$ ) et la proportion de déposants précoces est élevée. Avec une probabilité complémentaire (notée  $\omega_l$ ), le choc est bas. La proportion de déposants précoces est faible. Il n'y a pas d'incertitude sur le montant agrégé des retraits à la période  $t = 1$ , la seule incertitude repose sur la distribution du choc de liquidité entre les régions. L'allocation optimale est obtenue pour un cas dans lequel les banques conservent en actifs liquides la quantité moyenne des besoins de liquidité à la première période soit  $\gamma = \frac{\omega_l + \omega_h}{2}$ . La banque s'engage alors à des versements  $C_1$  et  $C_2$  pour les retraits effectués respectivement en  $t = 1$  et  $t = 2$ . La question qui se pose est celle de la décentralisation de cet optimum. Cette dernière peut être obtenue par l'ouverture d'un marché de dépôts interbancaires. Tout comme il est optimal pour les déposants d'agir en commun en ouvrant une banque mutualiste pour s'auto-assurer contre le risque d'être un consommateur précoce, il est optimal pour les banques de s'assurer mutuellement contre le risque d'avoir à faire face à un choc de liquidité haut en déposant des fonds ex-ante auprès de leurs partenaires. Selon la structure choisie par les banques pour le réseau de dépôts interbancaires, le montant des dépôts – symétrique entre les banques – est variable, mais il est toujours possible de mettre en œuvre l'allocation optimale tant que toutes les régions sont connectées. Ceci impose une restriction sur la nature des graphes. Il est nécessaire de rester dans des structures de graphes à une composante<sup>7</sup>. Allen et Gale (2000) s'attachent alors à étudier deux structures particulières en cas d'événement systémique. La première, dénommée réseau complet, est une structure dans laquelle chaque banque réalise un dépôt  $z$  dans chacune des autres banques. En terme de graphes, on est face à un réseau dirigé complet. La seconde, dénommée réseau incomplet, est une structure dans laquelle chaque banque détient un dépôt dans la banque de la région adjacente. En terme de graphes, on est alors face à un graphe dirigé circulaire.

---

<sup>7</sup>c'est à dire un graphe connexe dans lequel il existe un chemin entre chaque paire de sommets.

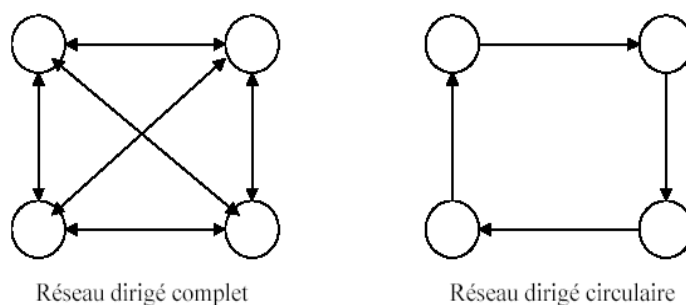


FIG. 1.1 – Structures de réseaux étudiées par Allen et Gale (2000)

Dans ces deux structures, les auteurs supposent que le réseau fait face en  $t = 1$  à une demande de liquidité non-prévue, de sorte que la quantité de liquidité disponible est inférieure à la quantité de liquidité demandée par les déposants. Cette demande non-anticipée correspond à la réalisation de l'événement systémique, catalyseur de la contagion. Ils montrent alors que la structure a une influence claire sur la propagation de l'événement systémique au long du réseau.

Si le réseau interbancaire est incomplet (circulaire), l'excès de demande de liquidité conduit à une liquidation anticipée par toutes les banques de leurs actifs interbancaires, et par suite à la faillite en chaîne de tous les établissements en raison de courses à la banque des déposants. En revanche, le réseau complet est plus résistant aux crises dans le sens où il existe des valeurs des paramètres pour lesquelles la faillite généralisée est le résultat d'équilibre pour le réseau incomplet alors qu'il n'y a pas de course à la banque généralisée dans le cas du réseau complet. En effet, dans le réseau complet l'exposition bilatérale des banques est moindre. Le dépôt réalisé par chaque banque auprès de ses partenaires est plus faible que dans le cas où le réseau est incomplet, la perte est alors moins élevée en cas de défaillance d'une banque partenaire.

En un sens, on peut dire que ce résultat de Allen et Gale (2000) est conforme aux résultats standards de finance concernant la diversification. Diversifier réduit le risque d'un portefeuille et, par suite, entrave la propagation d'un événement systémique

localisé, au sens de De Bandt et Hartmann (1995). Au final, Allen et Gale (2000) retrouvent sur une échelle interbancaire, les résultats de Diamond et Dybvig (1983). Ces derniers montrent que les agents ont intérêt à agir collectivement en créant des banques mutualistes pour s'assurer contre le risque d'être précoce. Allen et Gale (2000) montrent, eux, que les banques ont intérêt à l'action collective afin de s'assurer contre le risque d'être frappé par un choc haut de liquidité. Cette mutualisation des risques passe par l'échange des dépôts ex-ante. De plus, Allen et Gale (2000) montrent que cette action collective est porteuse de risques dans la mesure où la topologie du réseau est en mesure de transformer un petit événement systémique en crise de grande ampleur. Or, on peut dire que ce résultat est similaire au risque de course à la banque supporté par les déposants dans le modèle de Diamond et Dybvig (1983) dans le cas où les déposants patients agissent comme si ils étaient des déposants impatientes.

La capacité d'un événement systémique à se propager le long du réseau comme une fonction de la structure du réseau est un résultat que l'on retrouve dans la contribution de Freixas, Parigi et Rochet (2000). Ce modèle reprend la structure de Diamond et Dybvig (1983) mais, en considérant  $N$  régions et avec une proportion d'agents précoces si faible qu'elle est négligée. Ici, les agents ne sont pas incertains quant à la date à laquelle ils vont consommer mais quant au lieu de leur consommation future. Chez Diamond et Dybvig (1983), les banques jouent un rôle d'assurance de la consommation, dans la mesure où les déposants impatientes doivent être assurés contre le choc de consommation. Il s'agit d'assurer un lissage de la consommation grâce à la présence de banques. Chez Freixas, Parigi et Rochet (2000), il n'y a pas d'assurance intertemporelle de la consommation. La seule incertitude est géographique. Il existe, en effet, dans l'économie une proportion de voyageurs, nés dans une région  $i$  mais consommant dans une région  $j$  différente de  $i$ . La proportion complémentaire de consommateurs est sédentaire. Le type des consommateurs est une information privée. Les consommateurs peuvent retirer leurs dépôts en  $t = 1$  après avoir appris leur type (voyageur ou séden-

taire) pour voyager avec leurs fonds. Si ils retirent leurs fonds en  $t = 1$ , ils abandonnent de fait le rendement de l'actif long de la banque. Il peuvent également transférer leurs fonds auprès de la banque de la région dans laquelle ils vont consommer. Le transfert des fonds n'est possible que si les banques sont liées les unes aux autres par l'intermédiaire de conventions de crédits ouverts. Par une convention ouverte entre  $i$  et  $j$ , les déposants de la banque  $i$  voyageant en  $j$  ont le droit de voir leurs dépôts transférés dans la région  $j$  pour y retirer en  $t = 2$  leurs dépôts. Ceux-ci sont alors égaux à une fraction des actifs de la banque  $j$  à cette date. Les banques réalisent alors, entre elles, la compensation des sommes retirées par les voyageurs et transfèrent leurs fonds en fonction des chemins de voyage des déposants. Seules les banques ont accès à cette technologie de transfert du bien. Les accords de crédits signés en  $t = 0$  ne sont pas révisables dans le temps. Tous les passifs ont le même ordre de priorité en  $t = 2$ , si la banque est liquidée en  $t = 1$  ses actifs sont répartis entre les déposants seulement dans la mesure où les voyages - donc les transferts de fonds - n'ont pas encore eu lieu.

Les auteurs étudient trois types de réseaux issus des chemins de voyages des déposants, pour des banques situées le long d'un cercle et numérotées de 1 à  $N$ . Dans la " chaîne de crédit ", une proportion des consommateurs de la région  $i$  voyage et consomme dans la région  $i + 1$ . Dans le cas du réseau diversifié, au sein de la proportion des voyageurs une fraction voyage vers chacune des  $N - 1$  autres banques. On retrouve donc les deux structures étudiées par Allen et Gale. Le cas du réseau incomplet correspond à la chaîne de crédit dans lequel les lignes de crédits sont ouvertes entre deux banques adjacentes seulement. Le cas diversifié correspond au réseau complet, dans lequel chaque banque échange une quantité identique de déposants, et pour lequel chaque banque ouvre une ligne de crédit aux  $N - 1$  autres banques du réseau. La troisième structure étudiée est celle du " centre monétaire " dans laquelle une banque joue le rôle de pivot pour les autres banques. On est alors face à une structure de graphe en étoile.

A la date  $t = 1$ , les voyageurs décident de la fraction de leur dépôts à maintenir auprès de la banque de leur région d'origine – par exemple la région  $i$  – et de la fraction complémentaire à retirer. Le montant resté en dépôt auprès de la banque  $i$  par les déposants voyageurs est transféré auprès de la banque de la région dans laquelle ils vont consommer – la région  $j$ -. Ils pourront retirer un montant de dépôt  $D_j$  en période  $t = 2$  auprès de celle-ci. Si les déposants retirent leurs fonds de leur région d'origine, ils obtiennent avec certitude un montant  $D_0$ , si en revanche ils maintiennent leurs fonds ils obtiennent la valeur de  $D_j$  qui dépend de l'action des autres déposants. Il existe en effet un problème de coordination entre les déposants à la première période à un double niveau.

D'une part, le rendement obtenu sur les dépôts dans la région  $j$  dépend de l'action des déposants de cette région ( retirent-ils ou laissent-ils leurs dépôts en  $j$  ?). D'autre part la décision des agents de la région  $i$  est influencée par les anticipations qu'ils ont du comportement des déposants des autres régions qui vont voyager en  $j$ . Dans le cas où toutes les banques sont solvables, et où seul intervient le choc sur la distribution géographique des besoins de liquidité, on est face à deux équilibres possibles en stratégie pure. Le premier équilibre est tel que la confiance dans le système interbancaire est pérenne. Les prêts interbancaires se réalisent car les agents maintiennent leurs dépôts dans leur banque d'origine. Il n'y a alors aucune liquidation des actifs de long terme. Le second équilibre est tel que les déposants causent des courses contagieuses à la banque qui touchent tout le système bancaire. En effet, ils retirent leurs dépôts, et tous les investissements de long terme sont liquidés.

Au final, ce résultat est proche de celui de Diamond et Dybvig (1983) à la nuance près que l'incertitude porte sur le lieu de consommation et non sur la date. Les deux équilibres sont auto-réalisateurs, l'équilibre sans panique Pareto domine l'équilibre avec panique. Dans les deux équilibres les banques ont recours à des lignes de crédit ouvertes et honorent leurs engagements. Il faut en effet noter que dans l'équilibre de panique ce

ne sont pas les banques qui n'honorent pas leurs engagements, mais, les déposants qui en conduisant à la liquidation forcée réduisent le montant disponible pour la consommation en  $t = 2$ . C'est la contrainte de rationnement séquentiel de liquidité qui, chez Diamond et Dybvig (1983), explique l'existence d'un équilibre de panique. Ici, cette contrainte est exclue, tous les engagements des banques reçoivent la même priorité aux dates 1 et 2. C'est la contrainte de rationnement géographique qui se substitue à la contrainte de rationnement séquentiel. La valeur en  $t = 2$  des dépôts des agents tardifs voyageant vers la région  $j$  dépend ainsi des actions en  $t = 1$  des déposants de la région  $j$  appelés à voyager vers d'autres régions.

Outre ce problème de coordination, les auteurs se concentrent alors sur la question de l'influence de la faillite d'une banque sur le système dans son ensemble. Plus exactement, Freixas, Parigi et Rochet (2000), s'interrogent sur la capacité du système bancaire à absorber les pertes d'un établissement en faillite en évitant un enchaînement de courses contagieuses. La faillite localisée d'une banque – disons la banque  $k$  – produit plusieurs effets. D'une part, elle conduit à la disparition des actifs et des passifs de la banque en faillite, d'autre part, elle oblige les déposants des autres régions qui devaient consommer en  $k$  à retirer leurs fonds de manière précoce auprès de leur banque d'origine. Ces retraits anticipés sont en mesure de contraindre les banques en question à liquider une part de leurs actifs de long terme, ce qui peut conduire à une course à la banque. Ce résultat dépend cependant de la structure du réseau interbancaire. Dans le réseau circulaire, les faillites contagieuses apparaissent avec une plus grande probabilité que dans le cas du réseau complet. Cependant, dans ce dernier, la probabilité de faire face à des retraits anticipés est plus élevée. Dans le cas du "centre monétaire" l'existence de faillites contagieuses dépend des paramètres du modèle. Les auteurs montrent, en effet, que dans certains cas la faillite d'une banque liée au "centre monétaire" n'affecte pas ce dernier, alors que la faillite du centre a une grande portée systémique dans la mesure où elle entraîne des faillites en chaîne de banques dans son

voisinage.

Pour prévenir ces effets de contagion les banques ont à leur disposition un certain nombre de techniques dont les effets ne sont pas toujours tranchés. Le recours à des prêts interbancaires avec collatéral comme avec les prises en pensions – ou repo – est un moyen de freiner la contagion. Cependant, l'existence d'un marché de prise en pension peut conduire à la disparition du marché interbancaire international non assuré comme le notent Freixas and Holthausen (2001). Ce résultat provient d'un problème d'information asymétrique entre marché interbancaire intérieur, et marché interbancaire international. En cherchant un prêt interbancaire non assuré sur le marché international, une banque se signale comme ayant été dans l'impossibilité d'obtenir ce prêt sur le marché domestique des prises en pension où l'information entre établissements est plus complète. La Directive sur le Collatéral Financier (2002/47/EC) prise en 2002 par les autorités européennes s'attaque à ce problème. Cette directive vise à lever les éventuelles asymétries d'information entre marché domestique et marché international en offrant un cadre légal unifié concernant le recours à des prêts avec collatéral au sein de l'Union Européenne. Cette directive s'inscrit dans le Plan d'Action pour les Services Financiers, lancé en 1999, qui doit permettre d'intégrer de manière complète les différents marchés européens, en harmonisant les législations nationales. Il s'agit de définir la portée, les moyens et les modalités des prêts avec collatéral, ainsi que de " prévoir des procédures d'exécution rapide et non formelles afin de préserver la stabilité financière et de limiter les effets de contagion en cas de défaillance d'une partie à un contrat de garantie financière " (article 17). L'objet ultime est donc double. Il s'agit, d'une part, de garantir une meilleure information sur ces prêts de manière à ce que les emprunts avec collatéral d'une banque, en dehors de son pays d'origine mais au sein du marché unique, ne soient pas interprétés comme des signaux négatifs tels que décrits dans la contribution de Freixas et Holthausen (2001). Il s'agit, d'autre part, de permettre aux prêteurs d'obtenir des garanties réelles et non viciées dans l'objectif

d'éviter des défaillances en chaîne.

De telles mesures sont susceptibles d'accélérer l'intégration des marchés interbancaires européens. Les accords de compensation (netting) permettent également aux banques de ne prendre en compte que leur exposition nette pour réduire l'exposition aux risques du marché interbancaire. Par suite, la propagation d'une difficulté localisée dans un établissement bancaire au reste du système est d'ampleur plus réduite. Cependant, Emmons (1995) montre que de tels accords sont en mesure de produire un transfert des risques. Le risque de défaut d'une banque est transféré vers les créiteurs de la banque qui n'appartiennent pas à l'accord de compensation. Le risque de défaut quitte alors le marché interbancaire pour se reporter sur les créiteurs non bancaires.

L'article de Lagunoff et Schreft (2001) ne porte pas sur les réseaux interbancaires, mais modélise un réseau financier de portefeuilles d'investissement dont les participations sont liées. En terme de graphes, ceci se traduit comme suit : un réseau de participations relie les agents au travers de projets d'investissements. Ces projets nécessitent pour fonctionner la présence de deux investisseurs. Les agents ne connaissent pas leurs partenaires d'investissement : la composition des portefeuilles est une information privée. La chaîne d'investissement peut donc se représenter comme suit :

A l'origine l'économie est donc représentée par une chaîne fermée reliant les investisseurs via les projets (cf. figure 1.2). Des chocs sur les fondamentaux conduisent à la faillite un certain nombre de projets d'investissement. Ces chocs se traduisent par la disparition de certains projets. La chaîne, de fermée, devient ouverte. Les liens permettent alors à ces chocs localisés sur les fondamentaux de se propager entre les différents intervenants. Les agents ayant investi dans ces projets en faillite re-allouent leurs portefeuilles en plaçant systématiquement leur richesse restante en actif sans risque. En ré-allouant leurs portefeuilles, les agents brisent une partie des liens du réseau. Ce faisant ils retirent une partie de leurs investissements dans d'autres projets.



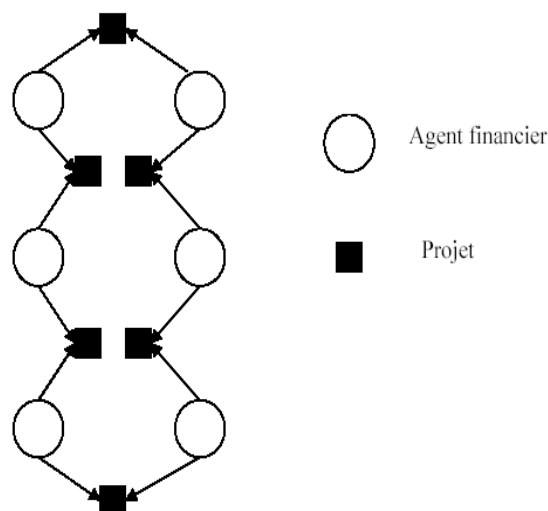


FIG. 1.2 – Réseau financier à 6 agents et 6 projets à la Lagunoff et Schreft (2001)

Ces derniers sont alors insuffisamment capitalisés, et sont conduits à la faillite lors de la période suivante. Deux types de crises contagieuses peuvent alors avoir lieu, selon que les agents soient ou non prévoyants.

La première se réalise si les agents, non prévoyants, ne ré-allouent leurs portefeuilles qu'en réaction à des pertes effectives enregistrées. La crise est donc graduelle et suit la rupture progressive des liens d'investissement au fur et à mesure des pertes enregistrées par les agents le long de la chaîne. Il n'est alors pas réellement possible de caractériser la crise dans la mesure où son ampleur ne dépend que de l'ampleur des chocs initiaux qui sont aléatoires. Dans le second type de crise, les agents prévoyants prennent en compte les conséquences futures de leurs actions, et anticipent le comportement des autres agents. Dans ce cadre, il est rationnel pour eux de se prémunir contre d'éventuelles pertes futures dues à la contagion en retirant leurs investissements des actifs risqués pour investir dans l'actif sans risque. Le problème de décision est alors dynamique. Contrairement à l'équilibre de contagion myope, on peut caractériser la fragilité à laquelle l'économie est confrontée. Plus les agents décident de rompre précocement leurs liens de portefeuille plus l'économie est considérée comme fragile. Il apparaît

que la fragilité est une fonction croissante de la taille de l'économie. Plus l'économie comporte d'agents (et de projets), plus la date de ré-allocation préventive est précoce (pour un degré de diversification donné invariant).

La contribution de Lagunoff et Schreft (2001) est donc l'une des premières tentatives d'intégrer une structure de réseau dans des modèles de contagion financière. Leur modèle souffre cependant d'un certain nombre de limites. En particulier, la structure choisie détermine le degré de diversification, et pourrait être non neutre sur les résultats. Il serait légitime de tester leur robustesse sur d'autres types de structures. Ils n'étudient pas non plus la capacité des différents réseaux à décentraliser ex-ante l'allocation Pareto optimale définie dans leur contribution comme l'allocation qui permet de satisfaire toutes les opportunités d'investissement.

### 1.2.3 Structures empiriques de réseaux interbancaires

Les premiers articles intégrant des structures de réseaux comme éléments influençant le risque proposent tous des structures assez simples. Ces réseaux reproduisent des structures typiques rencontrées dans la littérature : la ligne, le réseau en étoile, le réseau complet, le réseau circulaire. Cependant la réalité des réseaux interbancaires ne se rapproche pas de ces réseaux purs. La structure de ces réseaux peut être vue comme une combinaison de réseaux purs. Ainsi, dans le cas du réseau interbancaire suisse, Mueller (2003) décrit le réseau comme de faible densité, marqué par une forte centralisation. En effet, la densité du réseau mesurée par le nombre de liens effectifs sur le nombre total de liens possibles est de seulement 3%. La variance de la distribution du nombre de créiteurs auprès de chaque banque est très élevée (411), la distribution est décalée à droite et les queues de distribution sont très fines. 4 banques ont un degré débiteur très supérieur aux autres. Les deux banques les plus débitrices ont contracté des prêts auprès de plus de la moitié des banques dans le réseau, alors que les deux plus importants créiteurs ne sont liés qu'à 25% du secteur bancaire. Dans le réseau interbancaire suisse, il apparaît donc des banques à la fois créditrices et débitrices, mais

avec des positions courtes ou longues marquées. La variance du nombre de débiteur de chaque banque est inférieure à celle du nombre de créditeurs (127), mais la distribution des créditeurs partage avec celle des débiteurs les propriétés de décalage à droite et de finesse des queues. En réalité, le réseau interbancaire suisse peut être divisé en plusieurs sous réseaux. Le réseau des banques cantonales est assez homogène (en degré), et sa densité est plus élevée que celle du réseau interbancaire dans son ensemble. Le réseau des banques régionales est très centralisé autour d'un petit nombre de participants qui concentrent la plupart des relations de crédit.

Degryse et Nguyen (2004) notent en outre que dans le réseau interbancaire belge, la plupart des transactions interbancaires transitent par l'intermédiaire d'un nombre limité de banques de grande taille<sup>8</sup>. Ils soulignent en particulier que les banques de moindre importance ont réduit leur exposition au marché interbancaire belge. Ces dernières sont peu liées les unes aux autres, et ont de plus en plus tendance à passer par une grande banque qui joue à leur égard un rôle de fournisseur ou de client pour la liquidité. Ceci suggère donc que la topologie du marché interbancaire tend à se rapprocher d'une structure en étoiles interconnectées. Dans cette structure quelques grandes banques fédèrent un voisinage de banques (créditrices ou débitrices) de taille élevée, ces banques n'ayant elles-mêmes qu'un voisinage de taille réduite. Ces noeuds centralisateurs au sein du réseau sont liés entre eux, et le montant de leur exposition bilatérale est alors élevé.

Pour appréhender le risque impliqué par les structures de réseaux il est donc nécessaire de dépasser les structures simples pour envisager des structures quelconques. Face à la diversité des cas possibles, l'analyse suivie dans cette thèse consistera à se doter d'indicateurs caractérisant certaines propriétés des réseaux, tant en terme de distance géodésique entre les intervenants, qu'en terme de topologie.

---

<sup>8</sup>"Grande" doit ici s'entendre comme relatif à la taille du Produit Net Bancaire (PNB).

## Conclusion

La prise en compte de la " dimension réseau " dans l'analyse des fragilités bancaires ouvre donc une nouvelle piste pour étudier la nature et l'ampleur des risques pris par les banques de manière individuelle, ainsi que les risques portés par le système bancaire dans son ensemble. En effet, on voit à l'issue de cette synthèse que deux questions clés restent en suspens, l'une relative à la gestion du risque de liquidité, l'autre relative à la gestion du risque de faillite. Pour ce qui est de la gestion du risque de liquidité, on peut s'interroger sur la capacité de différents réseaux à distribuer la liquidité de manière efficace. Tous les réseaux sont-ils équivalents et permettent-ils aux intervenants de diminuer le montant des réserves liquides tout en se protégeant d'un risque de course à la banque ? Il s'agit donc de s'interroger sur les liens entre la structure des réseaux et la distribution de la liquidité. Cette question est l'objet des chapitres 2 et 3. La seconde question touche à la gestion du risque de faillite. Il s'agit de mesurer l'influence de l'architecture du réseau sur l'ampleur de la contagion et de la crise suite à un événement systémique. On lie ici structure de réseau et fragilités financières, ce qui est l'objet du chapitre 4.



## **Chapitre 2**

### **Réseaux interbancaires et gestion du risque de liquidité**

## Introduction

La littérature sur les marchés interbancaires a mis en évidence depuis Bhattacharya et Gale (1987)<sup>1</sup> un intérêt majeur de ces marchés pour les banques. Ils leur permettent, en effet, de réduire le montant des investissements dans les actifs liquides peu ou pas porteurs d'intérêt et d'accroître le montant des investissements dans les actifs longs plus rentables.

Le marché interbancaire ne représente, cependant, qu'un aspect de ce que l'on peut désigner comme l'architecture des réseaux interbancaires qui renvoie à l'ensemble de tous les systèmes de paiements interbancaires privés. Leur rôle est essentiel dans la gestion du risque de liquidité. En dehors des interventions et des facilités permanentes des banques centrales, ils permettent, par un système complètement privé d'échanges de fonds, d'ajuster les besoins de liquidité entre institutions bancaires. Ainsi, des systèmes de paiements interbancaires et de livraison des titres ont émergé en dehors de tout contrôle des banques centrales au travers desquels circulent des montants colossaux de liquidité comme CHIPS (Clearing House Interbank Payment System)<sup>2</sup>, SWIFT (Society for Worldwide Interbank Telecommunication) ou les systèmes européens STEP2 et TARGET.

Par conséquent, les banques se retrouvent aujourd'hui impliquées dans de nombreux réseaux de relations financières qui voient leur rôle s'accroître au rythme de la libéralisation et de la globalisation des marchés<sup>3</sup>. Par réseaux interbancaires, nous entendrons donc tout système permettant les échanges financiers entre banques comme les prêts interbancaires de court ou de long terme.

En dépit de leur croissance incontestable en tant qu'acteurs financiers autonomes,

---

<sup>1</sup>Ces résultats ont été repris par Rochet et Tirole (1996), Allen & Gale (2000) ou encore Freixas, Parigi et Rochet (2000)

<sup>2</sup>En 2004 CHIPS a traité plus de 270 000 paiements quotidiens pour une valeur totale de 1,4 trillion de USD.

<sup>3</sup>L'augmentation du nombre d'institutions bancaires et financières, et la croissance des opérations de prêts interbancaires ont été particulièrement bien illustrées par Furfine (2003), ou Bernard et Bisignano (2000).

les réseaux interbancaires ont peu retenu l'attention des économistes, y compris dans la littérature considérable qui s'est développée à la suite des travaux de Diamond et Dybvig (cf. chapitre 1). Les contributions existantes sur les réseaux interbancaires tendent à souligner les gains que ces derniers permettent de réaliser en diminuant le montant des réserves liquides. Les modèles avec plusieurs banques - à l'exception notable d'Allen et Gale (2000) et de Freixas, Parigi et Rochet (2000)- ne se penchent nullement sur l'influence de la topologie du réseau sur ce résultat. Cependant, si ces deux contributions introduisent des topologies elles n'en demeurent pas moins incomplètes. D'abord, elles n'étudient que certaines des topologies possibles et non toutes. Ensuite, elles se concentrent sur une notion restrictive de stabilité. Enfin, elles n'explorent pas le lien entre le nombre de participants et la topologie du réseau. L'objet de ce chapitre est donc de déterminer si tous les réseaux sont équivalents et permettent d'améliorer la situation par rapport à une situation d'autarcie.

Pour répondre à cet enjeu, nous allons considérer un cadre dérivé de Diamond Dybvig (1983), et Allen et Gale (2000) dans lequel les banques sont impliquées dans un réseau leur permettant de transférer des fonds entre elles. Il n'y a pas de banque centrale dans le réseau. Les banques font face à un choc de demande de liquidité aléatoire, haut ou bas, dont la distribution n'est pas connue ex-ante. La demande de liquidité agrégée est, elle, connue. Pour faire face à ce problème de distribution de la demande de liquidité, nous allons montrer dans ce chapitre que les banques ont intérêt à agir en commun de manière à réduire le montant des réserves liquides et à augmenter le montant des investissements en actif de long terme<sup>4</sup>.

A la différence de Allen et Gale (2000), les banques ne réalisent pas en  $t = 0$  de dépôts interbancaires auprès d'un ou de plusieurs autres établissements. Nous nous concentrons sur des réseaux de dettes interbancaires portant intérêt. Il n'y a pas d'échanges de fonds en  $t = 0$  dans notre modèle. Nous considérons des structures de réseaux comportant  $2p$  noeuds pour prendre en compte tous les effets liés à la struc-

---

<sup>4</sup>Ces éléments de notre modèle sont partagés avec le modèle de Allen et Gale (2000).



ture du réseau, ce qui n'est guère possible avec les 4 banques considérées par Allen et Gale (2000). Nous envisageons donc des structures topologiques qui n'ont pas été abordées par ces derniers. Enfin, nous étudions ces différentes architectures dans un double but. D'une part, nous déterminons quelles structures sont capables de décentraliser l'allocation optimale et de permettre aux banques participantes de réduire le montant de réserves liquides sans courir de risque d'illiquidité. D'autre part, nous établissons quelles structures sont ou ne sont pas stables au sens de la stabilité deux à deux de Jackson et Wolinsky (1996)<sup>5</sup>. Allen et Gale (2000) se contentaient d'étudier la "robustesse" du réseau qui peut être définie dans ce cadre comme la capacité du système à limiter la transmission du choc initial.

Dans ce chapitre, nous montrerons que s'impliquer dans un réseau permet d'améliorer le bien-être du déposant représentatif. C'est, en effet, un moyen de décentraliser l'allocation Pareto optimale, ce qui n'est pas possible si les banques demeurent isolées. Cependant, ce résultat dépend de l'architecture du réseau qui dépend, elle-même, du nombre de participants, et de la structure des coûts. Dans un cadre sans coût avec  $2p$  régions ( $p$  étant un entier naturel)<sup>6</sup>, le réseau interbancaire qui permet de décentraliser l'allocation optimale est soit en forme d'étoile, soit un réseau dans lequel la distance géodésique entre toute paire de banques est 2 au maximum, soit un réseau dans lequel chaque banque a au moins  $p$  partenaires. Plusieurs architectures interbancaires ne permettent pas d'améliorer la situation par rapport à l'autarcie. Une unique structure est en mesure de minimiser le coût total supporté par le réseau. Cependant, cette topologie exhibe un partage des coûts déséquilibré et n'est pas stable deux à deux. L'efficacité agrégée est incompatible avec la minimisation individuelle des coûts. Néanmoins, ces deux objectifs peuvent être réconciliés par un système de subventions.

Le plan de ce chapitre s'organise comme suit. Dans la section 1, les allocations

---

<sup>5</sup>La stabilité deux à deux renvoie à une situation dans laquelle nul joueur n'a intérêt à rompre un lien existant, ni à créer un nouveau lien.

<sup>6</sup>Si le nombre des régions était impair, les résultats ne seraient nullement affectés. Nous conservons un nombre pair pour de simples questions de clarté des propos et de simplicité des démonstrations.

obtenues par les banques isolées et l'allocation centralisée obtenue par le planificateur bienveillant sont comparées. La section 2 étudie la décentralisation de l'allocation Pareto optimale au travers d'un réseau interbancaire particulier avec une chambre de compensation commune. La section 3 considère les architectures de réseaux sans coût et compare leur capacité à décentraliser l'allocation de premier rang. Dans la section 4, un coût positif lié à la signature des contrats de dette est introduit et les questions de stabilité deux à deux sont étudiées.

## 2.1 Le modèle

Cette section décrit un modèle adapté de Allen et Gale (2000). Dans ce cadre, le réseau interbancaire permet un partage optimal des risques face à des chocs stochastiques.

Le temps est discret, divisé en trois périodes  $t = 0, 1, 2$ . Un unique bien stockable est disponible, il est considéré comme le numéraire. Il peut être consommé ou investi. En  $t = 0$ , les investissements peuvent être faits dans deux actifs seulement. Le premier actif est une technologie court terme de stockage. Une unité investie dans cette technologie à la date  $t$  produit une unité à la date  $t + 1$ . Le second actif est un actif de long terme illiquide. L'investissement dans cet actif ne peut être fait qu'à la date 0. Une unité investie en  $t = 0$  produit  $R > 1$  unités de bien à la période 2. Cependant, l'illiquidité n'est pas complète. Si l'actif de long terme est liquidé à la date intermédiaire, donc avant qu'il ne soit arrivé à maturité, il ne produit que  $r$  unités de bien de consommation, avec  $0 < r < 1$ . On fait l'hypothèse que la vente anticipée de l'actif long conduit à une dépréciation physique, la valeur de liquidation pouvant être considérée comme la valeur à la casse de l'investissement.

L'économie est constituée de  $2p$  régions ex-ante identiques ;  $p$  est un entier naturel strictement positif. On note  $V_{2p} = \{i_1, i_2 \dots i_{2p}\}$  l'ensemble des régions constituant l'économie. Dans chaque région existe une banque en monopole, chaque banque est un

sommet du réseau. Cette structure régionale peut être interprétée de différentes façons. Elle peut être vue comme un ensemble d'aires géographiques par exemple, ou comme un ensemble de branches spécialisées de l'industrie bancaire. Il n'y a pas de banque centrale, ce trait est commun à la plupart des modèles utilisant ce cadre.

Chaque région est peuplée par un continuum de déposants ex-ante identiques. Chaque déposant est doté d'une unité de consommation en  $t = 0$  et ne reçoit aucune dotation ultérieure. Les consommateurs ont des préférences standard à la Diamond et Dybvig. Avec une probabilité  $\lambda$ , ce sont des consommateurs précoces qui ne valorisent que la consommation à la date 1. Avec une probabilité  $1 - \lambda$  ce sont des consommateurs tardifs qui ne valorisent que la consommation à la date 2. Les préférences des consommateurs sont donc données par

$$U(C_1, C_2) = \begin{cases} U(C_1) & \text{avec une probabilité } \lambda \\ U(C_2) & \text{avec une probabilité } 1 - \lambda \end{cases}$$

$C_t$  est la consommation à la date  $t = 1, 2$ .  $U$  est deux fois continûment dérivable, croissante et strictement concave.

La probabilité  $\lambda$  varie selon les régions.  $\lambda^i$  est la probabilité d'être un consommateur précoce dans la région  $i$ . Il y a deux valeurs possibles pour  $\lambda^i$  : une valeur haute, notée  $\lambda_h^i$ , et une valeur basse notée  $\lambda_l^i$ , avec  $0 < \lambda_l^i < \lambda_h^i < 1$ . La valeur prise par  $\lambda$  dépend de l'état de la nature. Dans chaque état de la nature,  $S_k$ , la moitié des régions connaît le choc haut et l'autre moitié le choc bas<sup>7</sup>. Notons bien que dans deux régions touchées par un choc haut, la valeur de la demande de liquidité à la date intermédiaire est identique.

Dans le cas avec 4 régions, toutes les réalisations possibles du choc de liquidité sont données à titre d'exemple dans la table suivante :

---

<sup>7</sup>Les résultats sont inchangés avec des proportions quelconques. Le choix des proportions  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  est dicté par des raisons de simplicité d'exposition.

	Région 1	Région 2	Région 3	Région 4
Etat $S_1$	$\lambda_h^1$	$\lambda_h^2$	$\lambda_l^3$	$\lambda_l^4$
Etat $S_2$	$\lambda_l^1$	$\lambda_l^2$	$\lambda_h^3$	$\lambda_h^4$
Etat $S_3$	$\lambda_h^1$	$\lambda_l^2$	$\lambda_h^3$	$\lambda_l^4$
Etat $S_4$	$\lambda_l^1$	$\lambda_h^2$	$\lambda_l^3$	$\lambda_h^4$
Etat $S_5$	$\lambda_l^1$	$\lambda_h^2$	$\lambda_h^3$	$\lambda_l^4$
Etat $S_6$	$\lambda_h^1$	$\lambda_l^2$	$\lambda_l^3$	$\lambda_h^4$

Chaque région est confrontée à une demande de liquidité haute à la période intermédiaire, avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ . La demande agrégée de liquidité est donc connue avec certitude ex-ante. La seule variable inconnue est la distribution de ces chocs entre les régions. L'incertitude est levée en  $t = 1$ , quand l'état de la nature est révélé. En  $t = 1$  chaque consommateur connaît son type, ce qui est une information privée non observable. Comme il est standard dans un tel cadre, les agents ont intérêt à agir collectivement pour créer des banques mutualistes capables de leur offrir une assurance contre le risque d'être impatient.

L'objet de ce chapitre est double. D'une part, il s'agit de savoir si la présence d'un réseau permettant l'échange de fonds permet d'améliorer la situation par rapport au cas où les banques restent en autarcie. D'autre part, il s'agit de déterminer quelles structures de réseaux permettent de décentraliser la situation du planificateur bienveillant. Pour répondre à ces questions il est donc nécessaire d'étudier deux cas : une situation autarcique dans laquelle les banques restent isolées et une situation avec un planificateur bienveillant.

### 2.1.1 La solution autarcique

La banque maximise l'utilité espérée du consommateur représentatif sous contrainte. Le montant retiré par les agents en  $t = 1$  provient de la réalisation du risque de liquidité de chaque agent. On fait l'hypothèse que la réalisation du risque de liquidité est très volatile<sup>8</sup>. Formellement, on considère donc  $\lambda_l \ll \lambda_h$ . Le choc moyen est  $\gamma = \frac{1}{2}\lambda_h + \frac{1}{2}\lambda_l$ .

<sup>8</sup>La raison de cette volatilité n'est cependant pas modélisée ici. Il s'agit seulement d'une hypothèse formelle pour éviter que des banques ayant mis en réserve liquide le montant bas ne soient en mesure de faire face à la réalisation d'un choc haut.

Une banque en autarcie localisée dans la région  $i$  maximise l'utilité espérée ex-ante du consommateur représentatif

$$\underset{C_1^i, C_2^i, b^i, k^i}{Max} \frac{1}{2} [\lambda_l^i U(C_1^i) + (1 - \lambda_l^i) U(C_2^i)] + \frac{1}{2} [\lambda_h^i U(C_1^i) + (1 - \lambda_h^i) U(C_2^i)] \quad (2.1)$$

Sous les conditions suivantes :

$$b^i + k^i \leq 1 \quad (2.2a)$$

$$\lambda_h^i C_1^i \leq b \quad (2.2b)$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda_h^i) C_2^i \leq Rk^i \\ (1 - \lambda_l^i) C_2^i \leq Rk^i \end{cases} \quad (2.2c)$$

$$C_1^i \leq C_2^i \quad (2.2d)$$

En  $t = 0$ , la banque choisit un portefeuille  $(k^i, b^i) \geq 0$  où  $k$  est le montant par déposant investi dans l'actif long terme (capital), alors que  $b$  est le montant par déposant investi dans l'actif court terme (obligations), (Inégalité 2.2a). L'inégalité (2.2b) est la contrainte de faisabilité à la date 1, alors que la contrainte de faisabilité de la date 2 est donnée par l'inégalité (2.2c). Cette dernière dépend de la valeur du choc réalisé en  $t = 1$ . On a cependant  $(1 - \lambda_h^i) C_2^i \leq (1 - \lambda_l^i) C_2^i$ . Les hypothèses du modèle imposent à chaque banque de respecter la contrainte de liquidité haute en  $t = 1$ . En effet, l'emprunt est ici impossible puisque les banques sont en autarcie. En outre, la liquidation anticipée des actifs longs fait courir un risque de faillite à la banque si elle dépasse un certain niveau noté  $\beta$  qui est défini et calculé plus loin. En  $t = 2$ , les ressources de la banque doivent lui permettre de faire face aux retraits des déposants tardifs qui sont en proportion  $(1 - \lambda_l^i)$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  ou en proportion  $(1 - \lambda_h^i)$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  selon la réalisation du choc en  $t = 1$ . L'inégalité (2.2d) est la contrainte d'incitation.

Les conditions du premier ordre nous donnent les solutions suivantes

$$\hat{b}^i + \hat{k}^i = 1 \quad (2.3)$$

$$\lambda_h^i \hat{C}_1^i = \hat{b}^i \quad (2.4)$$

$$(1 - \lambda_h^i) \hat{C}_2^i = R \hat{k}^i \quad (2.5)$$

$$U'(\hat{C}_1^i) = R \frac{\lambda_h^i}{1 - \lambda_h^i} \frac{1 - \gamma}{\gamma} U'(\hat{C}_2^i) \quad (2.6)$$

Comme il est classique dans les modèles à la Diamond Dybvig, les déposants précoces bénéficient de la banque mutualiste. En autarcie, la contrainte de liquidité intermédiaire est serrée au niveau du choc haut. Toute banque est contrainte de conserver en réserves liquides un montant égal aux retraits des déposants précoces dans le cas où le choc est haut. Pour tout autre montant mis en réserves, une banque atteinte par le choc haut serait en situation d'illiquidité. Cette contrainte de liquidité haute serrée a pour conséquence de limiter les montants investis dans l'actif de long terme.

### 2.1.2 La solution du planificateur bienveillant

Les allocations ne dépendent pas de l'état de la nature. Chaque consommateur précoce reçoit  $C_1$  et chaque consommateur tardif reçoit  $C_2$  quelle que soit la banque dans laquelle il a effectué son dépôt et quel que soit l'état de la nature. Les banques font face à une situation ex-ante symétrique. En outre, elles disposent des mêmes capacités techniques et ont accès aux mêmes actifs. Notons que dans deux régions  $i$  et  $j$  touchées par un choc haut ( $i \neq j$ ), la valeur de la demande de liquidité à la date intermédiaire est la même, i.e.  $\lambda_h^i = \lambda_h^j$ . Le planificateur bienveillant peut transférer la liquidité entre les régions en  $t = 1$ , une fois le choc de liquidité connu, mais, avant les retraits des déposants. Comme il n'y a aucune incertitude sur le niveau de la demande de liquidité agrégée, les contraintes de liquidité à la période  $t = 1$  et  $t = 2$  portent sur le choc moyen. Le programme est résolu pour une région représentative en omettant l'indice relatif à la région.

La contrainte emploi ressource en  $t = 0$  demeure inchangée, mais les contraintes de liquidité en  $t = 1$  et  $t = 2$  sont désormais respectivement

$$\gamma C_1 \leq b \quad (2.7)$$

$$(1 - \gamma)C_2 \leq Rk \quad (2.8)$$

Le planificateur bienveillant maximise (2.1) sous les contraintes (2.2a), (2.6), (2.7), et sous la contrainte incitative (2.2d). Les CPO donnent

$$(1 - \gamma)C_2^* = Rk^*$$

$$\gamma C_1^* = b^*$$

$$U'(C_1^*) = RU'(C_2^*)$$

L'allocation du planificateur est une allocation de premier rang. Chaque banque conserve  $\gamma C_1^*$  unités de consommation investies dans l'actif court terme pour faire face à la demande de liquidité intermédiaire. Pour atteindre l'optimum de Pareto en  $t = 1$ , le planificateur transfère des fonds aux banques qui sont confrontées à un excès de demande de liquidité en prélevant l'excès de liquidité disponible auprès des banques qui sont confrontées à un choc bas. En  $t = 2$ , le planificateur réalise les transferts en sens contraire. L'allocation du planificateur exhibe un taux d'intérêt implicite qui se trouve le long de la courbe de transformation des maturités et vaut  $\frac{C_2^*}{C_1^*} - 1$ .

### 2.1.3 Comparaison des allocations en terme de bien être

Lorsque les fonds sont transférables entre régions, et qu'il n'y a aucune incertitude agrégée sur le niveau de la demande de liquidité dans la période intermédiaire, les banques peuvent limiter leurs réserves liquides au niveau du choc moyen. Dès lors, le montant disponible pour l'investissement dans l'actif long terme est supérieur au cas où les banques restent en autarcie. L'espérance de bien être agrégé peut s'écrire comme suit :

Dans le cas autarcique

$$\hat{W} = \gamma U \left( \frac{1 - \hat{k}}{\lambda_h} \right) + (1 - \gamma) U \left( R \frac{\hat{k}}{1 - \lambda_h} \right) \quad (2.9)$$

Dans le cas du planificateur bienveillant

$$W^* = \gamma U \left( \frac{1 - k^*}{\gamma} \right) + (1 - \gamma) U \left( R \frac{k^*}{1 - \gamma} \right) \quad (2.10)$$

Si les transferts de fonds entre régions sont possibles, le bien être agrégé est plus élevé dans le cas coopératif que dans le cas autarcique dans la mesure où le rendement de l'actif long est strictement supérieur à un. Il y a donc une incitation à réaliser les transferts de fonds entre les régions.

La liquidation de l'actif de long terme est un moyen de se procurer de la liquidité en  $t = 1$ . Cependant, cette solution est coûteuse et expose la banque au risque d'avoir à faire face à une course à la banque. Toute banque peut liquider une quantité maximum  $\beta(\lambda_h)$  d'unités d'actif long sans encourir le risque de course, (voir annexe 2.5.1)

$$\beta(\lambda_h) = r \left( k - \frac{(1 - \lambda_h)C_1^*}{R} \right)$$

Avec

$$(\lambda_h - \gamma) C_1^* > \beta(\lambda_h) \quad (2.11)$$

une banque en autarcie  $i$  qui n'aurait que  $b^*$  unités d'actifs court terme à disposition et faisant face à un choc de liquidité haut,  $\lambda_h$ , serait dans l'incapacité de faire face aux retraits des déposants courts en garantissant au moins  $C_1^*$  à ses déposants longs en  $t = 2$ . Il y aurait, dès lors, une incitation pour ces derniers à se comporter comme des déposants impatients pour retirer tous leurs actifs de la banque en  $t = 1$ . La banque serait donc conduite à la faillite. Cette situation est d'autant plus prégnante que  $r$ , la valeur de liquidation anticipée des actifs longs en  $t = 1$ , est faible. Au contraire, si une banque en autarcie avec  $b^*$  unités d'actifs court terme à disposition fait face à un choc de liquidité bas,  $\lambda_l$ , elle disposerait d'un excès d'actifs courts par rapport à la demande de retraits de ses déposants courts.



Pour faire face à cette mauvaise allocation de la liquidité, les banques sont donc incitées à ouvrir un marché interbancaire, de manière à permettre aux banques liquides de prêter leur excès de liquidité aux banques illiquides, à la condition que le coût d'accès à un tel réseau et le taux d'intérêt en vigueur ne soient pas dirimants. La question qui reste à résoudre est donc de savoir quelles sont les structures de réseaux interbancaires capables de décentraliser l'allocation optimale du planificateur.

## 2.2 Décentralisation de l'allocation optimale par un réseau interbancaire

Comme le soulignent Bhattacharya et Gale (1987), l'introduction d'un réseau de dettes interbancaires permet d'éliminer le risque lié à la distribution de liquidité et de décentraliser l'allocation optimale. Notre modèle se distingue de cette contribution sur deux points. En premier lieu, l'illiquidité est ici partielle et non complète nous avons en effet  $r > 0$  ; mais, cette différence ne joue pas de rôle ici. En second lieu, nous introduisons  $2p$  régions [et non seulement 2] dans le but d'étudier le rôle joué par chaque topologie de réseau possible sur la décentralisation de l'allocation optimale. C'est là le coeur même du modèle.

### 2.2.1 Définitions et hypothèses sur le réseau interbancaire

#### Nature des liens et du graphe

Le réseau interbancaire peut être représenté par un graphe non-dirigé. Soit  $g_{i,j} \in \{0,1\}$ , une arête.  $g_{i,j} = 1$  signifie que les banques  $i$  et  $j$  ont signé une convention bilatérale de crédit ouverte. Si  $g_{i,j} = 0$  aucune convention ne lie les banques  $i$  et  $j$ . Une arête entre  $i$  et  $j$  est construite si et seulement si  $g_{i,j} = g_{j,i} = 1$ . L'arête qui en résulte est notée  $ij$ . Le coût de la création d'une arête est supposé être nul dans un premier temps. Par ces conventions de crédit, les banques liquides s'engagent à prêter leur liquidité disponible aux banques illiquides qui le leur demandent. Le réseau

$g = \{(g_{i,j})\}$  n'est que la description formelle des liens bilatéraux existant entre les banques.  $G$  est l'ensemble de tous les réseaux non dirigés à  $2p$  sommets. Le voisinage d'une banque  $v$ , noté  $\Gamma(v)$ , est composé des banques avec lesquelles  $v$  est directement liée (sans inclure  $v$  elle-même)<sup>9</sup>. Le degré d'un sommet dans le réseau est le nombre de liens directs unissant ce sommet à d'autres sommets dans le réseau.

Nous avons recours à des graphes non dirigés pour signifier que, selon la répartition des chocs, les transferts de fonds peuvent se faire entre deux partenaires  $i$  et  $j$ , de  $i$  vers  $j$  ou de  $j$  vers  $i$ . Une fois ces contrats signés en début de  $t = 0$ , les banques ne peuvent les rompre ou en signer de nouveaux.

**Définition 1** *Un chemin est une liste de sommets telle qu'il existe dans le graphe une arête entre chaque paire de sommets successifs. La longueur du chemin entre deux sommets est le nombre d'arêtes sur ce chemin.*

*La distance entre les sommets  $i$  et  $j$  est la longueur du plus court chemin qui relie  $i$  à  $j$ . Elle est notée  $d(i, j)$ .*

---

<sup>9</sup>En termes techniques, on peut définir le voisinage  $\Gamma(v)$  d'un sommet  $v$  comme le sous graphe composé des sommets adjacents à  $v$  (mais sans inclure  $v$ ).

## Typologie des topologies de base

On aura au cours de cette thèse fréquemment recours à un certain nombre de topologies de réseaux typiques simples. Il s'agit du réseau en ligne, du réseau en étoile, du réseau circulaire et du réseau complet.

Dans un cas à quatre banques, ces réseaux sont représentés à la figure 2.1.

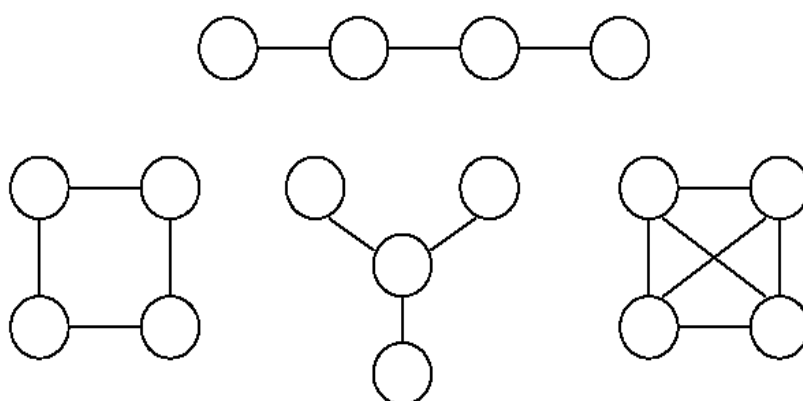


FIG. 2.1 – Réseaux en ligne, circulaire, en étoile et complet.

Un autre réseau typique étudié et qui joue un rôle central est le réseau  $k$ –régulier que l'on peut définir comme suit. Le réseau  $g$  avec l'ensemble de sommets  $V(g)$  est dit  $k$ –régulier si toute banque  $i$  du réseau  $g$  est liée à exactement  $k$  autres banques. Le degré de chaque sommet est donc égal à  $k$ .

$$\forall u \in V(g), \deg(u) = k$$

Dans le cas particulier du réseau à 4 banques, le réseau 2–régulier est le réseau circulaire, et le réseau 3–régulier est le réseau complet. Dans le cas d'un réseau à 8 banques, le réseau 3–régulier est représenté par la figure 2.2

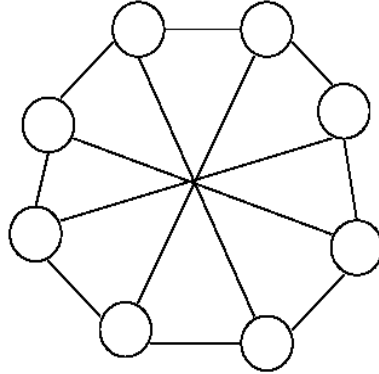


FIG. 2.2 – Réseau 3-régulier à 8 sommets.

### Comportement des banques et statut de liquidité

Chaque banque veut maximiser l'utilité du consommateur représentatif. Pour savoir si une structure particulière est en mesure de décentraliser l'allocation optimale, on fait l'hypothèse que le réseau interbancaire existe et on considère des architectures imposées de manière exogène dans lesquelles chaque banque  $i$  met en oeuvre l'allocation du planificateur bienveillant  $(b^*, k^*, C_1^*, C_2^*)$ .

**Définition 2** Une banque qui dispose de moins (respectivement plus) de liquidité que nécessaire pour faire face aux retraits des déposants précoces en  $t = 1$  est dite illiquide (respectivement sur-liquide<sup>10</sup>).

On dit qu'une banque est équilibrée quand le montant de liquidités inscrit à son actif couvre exactement le montant de liquidités au passif (i.e. le montant que les déposants courts peuvent retirer en  $t = 1$ ).

On fait en outre l'hypothèse suivante quant au comportement des banques équilibrées. Une banque équilibrée disposant dans son voisinage d'une banque sur-liquide et d'une banque illiquide se comporte comme une chambre de compensation : elle

<sup>10</sup>Une banque sur-liquide peut être vue comme étant dans une situation similaire à celle d'une banque sur-capitalisée. Cependant, dans le modèle de Diamond et Dybvig (1983) les banques ne disposent pas de capital. Recourir à cette terminologie plus courante serait donc incorrect.

emprunte de la liquidité auprès de la banque sur-liquide pour la prêter à la banque illiquide. Une banque équilibrée n'envoie aucun message à ses voisins, elle n'agit que dans le cas où elle peut jouer le rôle de chambre de compensation. Contrairement à Bhattacharya et Gale (1987), on ne traite pas ici des problèmes liées à l'information disponible. La situation de liquidité des banques est connue de leurs voisinages d'ordre 1 (c'est-à-dire de leurs voisins directs) du fait des signaux que les banques liquides et illiquides envoient à ces derniers au cours de la période  $t = 1$ . On peut donc considérer que les banques ont un comportement " faiblement altruiste " dans la mesure où elles jouent un rôle de chambre de compensation avec leurs voisins directs seulement.

L'économie interbancaire fonctionne comme suit :

En  $t = 0$ , dans une première étape, les banques encaissent les dépôts qui sont identiques normalisés à une unité. Dans une deuxième étape, on impose une architecture de réseau. Dans une troisième étape, les banques allouent leurs fonds.

En  $t = 1$ , dans une première étape, la distribution du choc de liquidité est révélée. Dans une seconde étape, les opérations de prêts interbancaires ont lieu. Dans une troisième étape, les consommateurs précoces retirent leurs dépôts.

En  $t = 2$  la dette interbancaire -principal et intérêts- est remboursée , enfin, les déposants longs retirent leurs dépôts.

Une fois le choc révélé, les banques illiquides signalent leurs besoins de liquidité auprès de leurs voisins directs. Le choix du débiteur auquel prêter est fait par le créateur sur une base aléatoire sur la base du réseau de liens. Dès lors, les échanges de fonds initiaux peuvent conduire à une concentration de liquidité au sein de certains noeuds. Il est donc nécessaire de procéder à un second tour d'échanges de fonds sur le même mode que le précédent. Le processus se répète tant qu'il y a échanges de fonds entre institutions. Les banques équilibrées ne sont pas émettrices de signaux.

Ce fonctionnement du marché interbancaire en  $t = 1$  est tout à fait comparable au fonctionnement effectif des marchés interbancaires au long d'une journée de banque.

Comme il est la règle sur ces marchés, les intervenants ne font pas courir d'intérêt au cours d'une journée de banque. Dès lors, nous ne prendrons pas en compte un facteur d'escompte entre les différentes sous-étapes.

Le coût de la création d'un lien est supposé être nul dans un premier temps. Dans la section 4, on ajoutera un coût fixe dont chaque banque doit s'acquitter pour la création d'un lien. Comme dans l'article de Aghion et alii (2000) tous les prêts dans le réseau portent le même taux d'intérêt. Le taux appliqué aux débiteurs est égal au taux sans risque  $r_1$  augmenté d'une prime de risque  $\rho$ . Cette dernière compense les risques associés au réseau. Si l'on note  $q$  la probabilité qu'une banque soit en faillite, avec des banques neutres au risque, on a

$$\rho = \frac{q}{1-q} (1 + r_1) \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Décentralisation de l'allocation du planificateur bienveillant par une chambre de compensation commune

L'allocation du planificateur bienveillant est une allocation optimale. Elle peut être " décentralisée " au travers d'une structure walrasienne de chambre commune qui compense les excès d'offre et de demande de liquidité. Dans un tel cadre, les banques ne sont pas liées les unes aux autres au travers de liens bilatéraux. Elles ont simplement accès à une chambre de liquidité commune qui fonctionne comme l'unique compensateur et fournisseur de liquidité.

**Définition 3** *La chambre de compensation commune peut être définie comme suit :*

- 1) *Toutes les banques sont liées à un noeud particulier auquel tous les excès de liquidités sont transférés en  $t = 1$ , et par lequel tous les règlements transitent en  $t = 2$ .*
- 2) *Ce noeud n'est pas une banque mais une place de marché pour l'échange de liquidité qui ne joue aucun rôle en  $t = 0$ .*
- 3) *Sur cette place de marché, la liquidité est prêtée à un taux d'intérêt unique.*

La chambre de compensation commune est donc très proche tant du commissaire-priseur walrasien que d'une banque centrale. Contrairement à une banque centrale, néanmoins, la chambre commune ne crée pas de liquidité. Elle fonctionne comme une chambre de compensation générale des excès d'offre et de demande de liquidité. Simple lieu des transferts de liquidité, cette structure peut être vue comme une décentralisation de l'allocation Pareto optimale. Comme il n'y a aucune incertitude agrégée, les optima de Pareto ex-ante et ex-post sont identiques.

**Proposition 1** *La chambre commune permet de décentraliser l'allocation Pareto optimale en posant un niveau de taux d'intérêt sur la dette égal à :*

$$1 + r_1 = \frac{C_2^*}{C_1^*}$$

(Voir démonstration en annexe 2.5.2).

Cette structure ne souffre d'aucune faillite, tout en permettant de réduire le montant des investissements en actifs liquides à leur niveau moyen. C'est, en réalité, à ce type de structures que font implicitement référence toutes les contributions qui considèrent les marchés interbancaires avec plus de 2 banques. Du fait de l'absence d'incertitude sur le niveau agrégé de la demande de liquidité, toutes les banques sont en mesure de satisfaire les besoins de retraits de leurs déposants courts en maintenant un niveau de réserves de liquidité au niveau moyen. On peut donc considérer la chambre commune comme une presque banque centrale dans la mesure où elle transfère la liquidité, mais, n'en crée pas. Cette structure est exclusive : toutes les banques sont liées à la chambre commune, mais ces dernières n'entretiennent aucun liens bilatéraux. Le voisinage de chaque banque est composé uniquement de la chambre commune.

Cette structure envisagée n'est cependant pas jouée. Nous allons nous concentrer sur des structures de réseau sans chambre commune, et sans banque centrale. Dans ce cadre, nous allons étudier la capacité de différentes structures de réseau à décentraliser l'allocation optimale par des compensations directes entre les banques. Nous présentons

en premier lieu un exemple à quatre banques avant de considérer un cas général à  $2p$  banques.

## 2.3 Réseaux interbancaires

### 2.3.1 Un exemple introductif à 4 banques

Dans une économie à 4 banques, il est possible de considérer quatre réseaux à une composante<sup>11</sup> différents liant les intervenants : la ligne, le réseau circulaire, le réseau complet, le réseau en étoile. En outre, 4 réseaux à plusieurs composantes sont possibles : un premier réseau composé de deux composantes de deux banques liées, un réseau de deux composantes dont l'une est un singleton isolé et l'autre trois banques liées (en ligne ou de façon circulaire) ; un réseau composé de deux singletons et d'une ligne liant deux banques, et enfin, un réseau vide composé de quatre singletons isolés.

**Lemme 1** *Quand l'économie est composée de 4 régions une condition nécessaire et suffisante pour que le réseau interbancaire décentralise l'allocation Pareto optimale est que la distance soit au maximum de deux.*

(Voir démonstration en annexe 2.5.3)

Le lemme 1 caractérise les réseaux en mesure de décentraliser l'allocation optimale en terme de distance. Dans la mesure où le nombre de banques est limité à 4, cette caractérisation a des conséquences directes en terme de topologie.

**Proposition 2** *L'allocation optimale peut être décentralisée au travers de 3 structures seulement : le réseau circulaire, le réseau complet, et le réseau en étoile.*

*Démonstration.* Ces trois structures vérifient trivialement le lemme 1 alors que toutes les structures à plusieurs composantes et la ligne ne la satisfont pas. ■

---

<sup>11</sup>graphe connexe dans lequel il existe un chemin entre chaque paire de sommets.



### 2.3.2 Généralisation à un réseau à $2p$ banques

On considère désormais une structure générale où l'ensemble de banques  $V_{2p} = \{i_1, i_2, \dots, i_{2p}\}$  sont les sommets du réseau. Le jeu auquel les banques font face est le même que précédemment.

Quel que soit le nombre de banques l'allocation du planificateur reste la même. Les banques liquides et illiquides sont dans des situations symétriques en regard de la liquidité. Il y a la même proportion de banques liquides et illiquides ( $\frac{1}{2}$  pour chaque proportion). En conséquence, le besoin de liquidité agrégé est égal à la liquidité disponible dans le système dans son ensemble. La question qui se pose consiste à déterminer l'ensemble des structures de réseaux qui permettent de gérer efficacement le risque de liquidité, c'est-à-dire de distribuer la liquidité entre les banques de manière à décentraliser l'allocation Pareto optimale.

Le point crucial est la façon dont la liquidité peut être transférée entre les banques le long des liens du réseau ce qui dépend uniquement de la structure des liens.

Dans le cas à 4 banques, il était possible d'envisager 6 distributions possibles du choc de liquidité. Avec  $2p$ , banques on a  $\binom{2p}{p}$  distributions possibles : tous les réseaux à plusieurs composantes, le réseau circulaire, le réseau complet, les réseaux dits  $k$ -réguliers (ou réseaux en étoiles régulières interconnectées), l'étoile, et tous les réseaux asymétriques.

Face à la multiplicité des configurations de réseaux possibles, nous nous reposerons sur deux types d'outils différents. D'une part, nous caractériserons les réseaux asymétriques et symétriques par une propriété de distance. D'autre part, nous obtiendrons une caractérisation topologique sur la classe des réseaux symétriques.

**Lemme 2** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau à  $2p$  banques décentralise l'allocation optimale est que la distance entre deux banques quelconques est au maximum de 2.*

(Voir annexe 2.5.4 pour la démonstration.)

Le lemme 2 généralise le lemme 1 au cas des réseaux à  $2p$  banques. Ce lemme nous permet de caractériser les réseaux interbancaires par une propriété de distance tant pour les réseaux asymétriques que symétriques. Nous sommes donc face à une situation de "petit monde" financier dans lequel les banques sont séparées les unes de autres seulement par une courte chaîne d'intermédiaires qui fait que les banques ne sont pas distantes les unes des autres de plus de 2 degrés de séparation. Ce résultat théorique sur la distance doit être rapproché des données. En effet, Boss et alii (2003) montrent que la distance moyenne dans le réseau interbancaire autrichien (non-dirigé) est de  $2,26 \pm 0,03$ . Les réseaux de "petit monde" sont donc des substituts à la chambre commune walrasienne. Ils sont, en un sens, moins stricts dans la mesure où ils reposent exclusivement sur des contrats privés de relations bilatérales, et ne nécessitent pas la topologie exclusive où la chambre commune est le seul lieu d'échange pour la liquidité. Grâce à cette propriété, il est possible d'écarter un vaste ensemble des réseaux qui ne sont pas en mesure de décentraliser l'allocation optimale sans faillite. La gestion du risque de liquidité est donc tributaire de la structure du réseau en place.

**Proposition 3** *i) Tous les réseaux à plusieurs composantes, le réseau en ligne, et le réseau circulaire ne permettent pas de décentraliser l'allocation Pareto optimale ;*

*ii) le réseau en étoile en revanche est en mesure de décentraliser cette allocation.*

(Voir annexe 2.5.5 pour la démonstration)

Cette caractérisation en terme de distance reste cependant incomplète et n'est donc qu'une première approche. En effet, même si elle permet d'éliminer un grand nombre de réseaux possibles, il demeure encore un vaste nombre de topologies capables de décentraliser l'allocation optimale sans faillite. Pour exhiber des résultats directement en terme de structure, on peut restreindre notre analyse à une sous classe de réseaux permettant une gestion efficace du risque de liquidité.

**Proposition 4** *Tout réseau  $k$ -régulier avec  $k \geq p$  décentralise l'allocation de premier rang.*

(Voir annexe 2.5.6 pour la démonstration)

**Corollaire 1** *Le réseau complet décentralise l'allocation de premier rang.*

**Preuve.** Par définition, dans le réseau complet la distance entre deux banques quelconques est 1. Le réseau complet est  $(2p - 1)$ -régulier. Dès lors, le réseau complet décentralise l'allocation de premier. ■

En restant dans la classe des réseaux qui vérifient le lemme 2, par cette caractérisation directe en terme de structure, on peut exhiber une classe unique de réseaux en mesure de décentraliser l'allocation du planificateur. Si le réseau est construit de cette manière, les banques peuvent gérer les chocs de liquidité en maintenant un niveau relativement bas de liquidité en réserve, et en évitant le risque de course à la banque.

Jointe à la propriété de " petit monde ", la proposition précédente implique que, pour maintenir les conditions optimales, la croissance du nombre de banques dans le réseau conduit à la densification de relations interbancaires. Le nombre total de liens est une fonction quadratique du nombre de sommets  $p$ . Ce résultat peut être facilement lié à la libéralisation financière. Sur les vingt dernières années, la libéralisation financière a conduit à une hausse du nombre d'institutions financières opérant sur les marchés de deux façons. D'une part, au niveau international, la libéralisation des flux de capitaux et la déréglementation ont permis à des institutions financières domestiques d'agir en dehors de leur scène nationale. D'autre part, sur la scène intérieure, la libéralisation financière a permis la création d'un grand nombre de nouvelles institutions financières - parfois même avec des niveaux de capitaux investis très faibles en raison d'une législation permissive -. Un exemple typique de ces deux phénomènes est donnée par l'Asie du Sud-Est lors des années 1980 à 1996. Dans cette période, les banques des pays de l'OCDE ont ouvert des filiales dans les pays d'Asie du Sud -Est pour prendre part au " miracle " du boom asiatique. En parallèle, un grand nombre d'institutions financières nouvelles locales ont été créés par des investisseurs asiatiques. Cette croissance dans

le nombre de banques peut être interprétée dans les termes de notre modèle, comme une augmentation du nombre de joueurs dans le réseau. Ceci s'est accompagné d'un accroissement net des échanges de fonds interbancaires à court terme comme en témoignent les chiffres de l'évolution des activités interbancaires sud-asiatiques<sup>12</sup>. Ainsi, des marchés destinés au traitement et à l'échange de dettes interbancaires se sont développés comme le BIBF (Bangkok International Banking Facilities) pour faciliter le financement des banques locales. De tels marchés fonctionnaient comme de véritables noeuds financiers distribuant la liquidité entre les intervenants. Cette croissance s'est, en outre, accompagnée d'une remarquable stabilité des systèmes financiers asiatiques dans la mesure où jusqu'à la crise de 1997 aucune faillite bancaire d'importance n'eut lieu même parmi les institutions faiblement capitalisées.

## 2.4 Intégration d'un coût d'accès

Par une caractérisation en terme de distance, ou en terme de topologie, nous avons pu exhiber les réseaux en mesure de décentraliser l'allocation optimale. Cependant, le nombre de réseaux qui permettent cette décentralisation est encore élevé. Il s'agit de l'ensemble des réseaux en étoile, et des réseaux  $k$ -réguliers avec  $k \geq p$ , ainsi que l'ensemble des réseaux vérifiant la propriété de "petit monde". Pour discriminer plus avant entre les structures possibles, nous allons lever l'hypothèse sur les coûts. Nous considérons que chaque banque doit payer un coût fixe  $\bar{c}$  pour la signature de chaque convention de crédit ouverte ( $\bar{c}$  est un coût par déposant). Il peut s'agir d'un coût de négociation, d'un coût relatif à la transmission des informations financières préalables, d'un coût d'embauche d'un négociateur sur la dette interbancaire, ou de tout coût à payer pour acquérir la technologie qui permet le transfert de fonds.

Par hypothèse, on considère le cas dans lequel l'allocation obtenue en s'impliquant dans le réseau permet d'améliorer la situation au sens de Pareto par rapport à une

---

<sup>12</sup>Les chiffres des flux interbancaires publics ne sont cependant pas disponibles sur une base désagrégée; on ne dispose que du montant total des échanges.

situation dans laquelle les banques restent isolées et mettent en oeuvre l'allocation autarcique décrite à la section 2.1.1. Ceci impose que le coût par déposant soit suffisamment faible pour ne pas faire disparaître les gains liés au réseau qui permet d'accroître le montant des investissements dans l'actif de long terme.

Nous procéderons comme suit. Nous proposerons dans un premier temps le problème social dans lequel un planificateur bienveillant peut maximiser le bien être à coût donné. Dans un second temps, nous nous interrogeons sur les conditions à poser sur le réseau en terme de topologie de manière à décentraliser les optima de Pareto. Dans un troisième temps nous étudierons la structure de réseaux pour laquelle le bien être social est maximal (réseau dit à efficacité forte -définition infra-), et, nous démontrerons que ce type de réseaux n'est pas stable au sens de Jackson et Wolinsky (1996). Enfin, dans un quatrième temps, nous nous interrogerons sur les possibilités de garantir la stabilité de ce réseau par un système de subventions.

### 2.4.1 L'allocation du planificateur

Comme dans le cas sans coût il est nécessaire de déterminer un problème dans lequel un planificateur bienveillant maximise une fonction de bien être social. Dans ce problème social doit être prise en compte le montant des coûts. Le planificateur est capable de réaliser une mutualisation des coûts en maximisant le bien être social par des transferts de liquidité entre les banques de manière à lisser la consommation dans les  $2p$  différentes régions. Le coût agrégé total considéré est noté  $\theta$ .

En conservant des notations inchangées par rapport à la partie précédente, le problème du planificateur peut donc se poser comme suit :

$$Max_{b,k,C_1,C_2} \frac{1}{2} [\lambda_l U(C_1) + (1 - \lambda_l) U(C_2)] + \frac{1}{2} [\lambda_h U(C_1) + (1 - \lambda_h) U(C_2)] \quad (2.13)$$

Sous les contraintes

$$b + k + \frac{\theta}{2p} \leq 1 \quad (2.14a)$$

$$\gamma C_1 \leq b \quad (2.14b)$$

$$(1 - \gamma)C_2 \leq Rk \quad (2.14c)$$

$$C_1 \leq C_2 \quad (2.14d)$$

où  $\frac{\theta}{2p}$  correspond au coût supporté par banque par déposant de manière à lisser la consommation entre les régions.

Les CPO donnent

$$\dot{b} + \dot{k} + \frac{\theta}{2p} = 1 \quad (2.15a)$$

$$\gamma \dot{C}_1 = \dot{b} \quad (2.15b)$$

$$(1 - \gamma) \dot{C}_2 = R \dot{k} \quad (2.15c)$$

$$U'(\dot{C}_1) = RU'(\dot{C}_2) \quad (2.15d)$$

L'allocation obtenue maximise l'utilité ex-ante du déposant représentatif. Cette allocation est une allocation optimale compte tenu des coûts supportés par l'ensemble des banques dans le réseau. Chaque banque conserve un montant de réserves liquides  $\gamma \dot{C}_1$  qui dépend du choc moyen. Le planificateur est en mesure de réaliser les transferts nécessaires entre les banques pour garantir une consommation maximale identique à chaque classe de déposants (tardifs ou précoces) quelle que soit sa région d'origine. Ces transferts proviennent tant des compensations des besoins de liquidités entre les banques que de la répartition des coûts. Il faut remarquer que l'optimum social dépend du total des coûts à prendre en compte. Il y a autant d'allocations à décentraliser que de niveaux de coûts totaux à répartir. Etant donnée la structure des coûts, cette prise en compte du coût total par le planificateur revient à considérer une contrainte de réseau.

### 2.4.2 Décentralisation des allocations optimales

Le coût total pris en compte par le planificateur correspond en terme de réseau au total des coûts payés individuellement par chaque banque. Pour décentraliser grâce à un réseau l'allocation Pareto optimale avec le coût total  $\theta$ , on doit prendre en compte les coûts individuels supportés par chaque banque. En effet, chaque banque  $i$  insérée dans le réseau supporte le coût  $n_i\bar{c}$ , où  $n_i$  est le nombre de conventions signées par la banque  $i$ . Au total, le coût supporté par le réseau dans son ensemble est donc pour le réseau noté  $g$ , dont l'ensemble des sommets est noté  $V(g)$ , de cardinal  $2p$ .

$$\sum_{i \in V(g)} n_i \bar{c} = \theta \quad (2.16)$$

L'optimum social à décentraliser est fonction du total de coût auquel il correspond, il dépend donc du réseau, il y a autant d'allocations à décentraliser que de niveaux de coûts totaux supportés par les réseaux possibles. Pour lisser la consommation entre les régions, les transferts réalisés par le planificateur bienveillant entre les régions viennent compenser les différences en terme de coûts et les différences liées aux niveaux des chocs de liquidité. On peut établir la proposition suivante :

**Proposition 5** *Chaque réseau  $k$ -régulier avec  $k \geq p$  décentralise une allocation Pareto optimale.*

(Voir démonstration en annexe 2.5.7)

Dans le cas des réseaux  $k$ -réguliers avec  $k \geq p$  on se retrouve à une constante près dans la situation sans coût. Cette constante n'influence que le niveau de consommation des consommateurs précoces et tardifs, et non la capacité à décentraliser l'allocation du planificateur. L'allocation Pareto optimale décentralisée dépend du réseau en place. Dans un réseau à  $2p$  sommets, on peut décentraliser autant d'allocations que de réseaux  $k$ -réguliers avec  $k \geq p$ , c'est à dire qu'il y en a  $(p+1)$ . En ce cas, le coût total supporté par le réseau est  $2kp\bar{c}$ , donc au minimum  $2p^2\bar{c}$  et au maximum  $2(2p-1)p\bar{c}$ . On s'interroge

sur la possibilité de décentraliser une allocation de coût inférieur au travers d'un réseau d'une autre forme.

### 2.4.3 Réseau de coût agrégé minimum

Nous allons procéder en deux temps. Dans un premier temps nous allons déterminer au sein de tous les réseaux, le réseau dont le coût agrégé est le plus faible. Dans un second temps nous étudierons la stabilité deux à deux (définition infra) de la structure ainsi obtenue.

#### Minimisation du coût agrégé supporté par le réseau

On considère une structure correspondant à un niveau de bien être social maximal. Il y a là une double contrainte. Il s'agit d'une part d'obtenir un réseau qui permet de compenser les excès de demande et d'offre de liquidité, et d'autre part, de minimiser d'un point de vu social le coût porté par le réseau dans son ensemble.

La première contrainte (celle sur les transferts de liquidité), nous conduit, comme dans le cas sans coût, à ne considérer que des réseaux à une composante. La seconde contrainte (celle sur le coût agrégé) nous conduit à considérer des réseaux disposant d'un nombre minimal de connections.

On est face au jeu de réseau  $[V(g), \mu(g)]$  où  $V(g)$  est l'ensemble des banques et  $\mu(g)$  la fonction valeur associée au réseau  $g$ .  $G$  est l'ensemble des réseaux à une composante.

**Définition 4** Une fonction valeur  $\mu$  est une fonction  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à chaque réseau la valeur totale qu'il génère. L'ensemble des fonctions valeur est noté  $\Upsilon$ .

Ici, la valeur associée au réseau correspond à l'utilité retirée par les déposants.

$$\mu(g) = \gamma U(C_1) + (1 - \gamma)U(C_2) \quad (2.17)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont les niveaux de consommation des déposants précoces et tardifs.

Par hypothèse, on considère le cas dans lequel l'allocation obtenue en s'impliquant dans le réseau permet d'améliorer la situation au sens de Pareto par rapport à une



situation dans laquelle les banques restent isolées et mettent en oeuvre l'allocation autarcique décrite à la section 2.1.1. Ceci impose que le coût par déposant soit suffisamment faible pour ne pas faire disparaître les gains liés au réseau qui permet d'accroître le montant des investissements dans l'actif de long terme. Rechercher le réseau qui minimise le coût agrégé total supporté par le réseau revient donc à rechercher le graphe fortement efficace avec la définition suivante de l'efficacité forte :

**Définition 5** *Un graphe  $g \in G$  est fortement efficace si  $\mu(g) \geq \mu(g')$  pour tout  $g' \in G$ <sup>13</sup>.*

Pour déterminer le graphe fortement efficace il est donc nécessaire de comparer les niveaux de bien être obtenu par les déposants selon le réseau en place. Il faut donc prendre en compte les coûts associés au réseau, tant du fait du coût fixe relatif à la création d'un lien que les niveaux d'investissement dans l'actif long obtenu. On peut établir la proposition suivante :

**Proposition 6** *Le réseau en étoile est le graphe fortement efficace.*

(Voir démonstration en annexe 2.5.8)

La structure de coûts utilisée dans le modèle, conduit à une situation pour laquelle le réseau fortement efficace est le réseau en étoile. Pour le niveau d'investissement obtenu dans ce graphe<sup>14</sup>, et avec un coût fixe par déposant  $\bar{c}$  pour chaque convention de crédit signée, le graphe fortement efficace est le réseau à une composante avec un nombre minimal de liens. Il s'agit donc du réseau en étoile, et ce, quel que soit le nombre de participants<sup>15</sup>. Le coût direct total supporté par le réseau est  $2(2p - 1)\bar{c}$ . La question qui se pose dès lors est celle de la stabilité d'un tel réseau.

---

<sup>13</sup>Voir Jackson & Wolinsky (1996)

<sup>14</sup>Voir en annexe 2.5.8

<sup>15</sup>Notons que le graphe en ligne, qui présente le même nombre d'arrêtes que le graphe en étoile, ne permet pas de décentraliser l'allocation de second rang. (Voir démonstration en annexe 2.5.8)

### Stabilité du réseau fortement efficace

La minimisation sociale des coûts n'est pas compatible avec la minimisation du coût supporté par chaque joueur pris individuellement dans le cas de l'étoile. En effet, en raison du coût d'accès payé par les membres du réseau, la valeur engendrée par le réseau en étoile n'est pas répartie selon une règle égalitaire : les gains de chaque banque dépendent de sa position dans le réseau, et du nombre de conventions de crédit signées.

**Définition 6** *Une règle d'allocation est une fonction  $Y : G \times \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$  telle que  $\sum_i Y_i(\mu, g) = \mu(g)$  pour tout  $\mu$  et tout  $g$ .*

La valeur totale engendrée par le réseau est donc la somme des valeurs obtenues par chaque participant :

$$\mu(g) = \sum_{i \in V} Y_i(g, \mu) \quad (2.18)$$

En revanche, la règle d'allocation décrit la façon dont la valeur associée à un réseau particulier est distribuée à chaque banque prise individuellement.  $Y_i(\mu, g)$  correspond donc au rendement obtenu par la banque  $i$  du graphe  $g$  sous la fonction valeur associée  $\mu$ . L'allocation de chaque banque dépend de la structure du réseau, et, de la position tenue par la banque dans la structure considérée.

**Définition 7** *Une règle d'allocation égalitaire est une règle  $Y^e$  dans laquelle chaque participant du réseau interbancaire reçoit la même valeur quelle que soit sa position dans le réseau.  $Y^e$  peut s'écrire*

$$Y_i^e(g, \mu) = \frac{\mu(g)}{2p}$$

Dans le cadre du réseau interbancaire avec coût, la règle égalitaire est en place quand chaque participant au réseau paye le même coût d'accès total au réseau, i.e. quand la distribution des coûts entre les joueurs est égalitaire. Avec notre structure de coût, ceci a lieu quand le degré de chaque noeud est identique.

Pour étudier la stabilité des réseaux, on aura recours à la définition de la stabilité deux à deux donnée par Jackson et Wolinsky (1996).

**Définition 8** *Un réseau  $g$  est " stable deux à deux " par rapport à  $\mu$  et  $Y_i$  si*

- (i) *Pour tout  $ij \in G$ ,  $Y_i(g, \mu) \geq Y_i(g - ij, \mu)$  et  $Y_j(g, \mu) \geq Y_j(g - ij, \mu)$ , et*
- (ii) *Pour tout  $ij \notin G$ , si  $Y_i(g, \mu) < Y_i(g + ij, \mu)$  alors  $Y_j(g, \mu) > Y_j(g + ij, \mu)$*

On peut dès lors faire la proposition suivante :

**Proposition 7** *i) Le réseau en étoile est le seul réseau fortement efficace. Il minimise le coût total agrégé.*

*ii) Cependant, en raison de la structure de coût déséquilibrée qu'il exhibe, le réseau en étoile n'est pas stable deux à deux.*

*iii) Les seules topologies stables deux à deux sont les réseaux  $k$ -régulier avec  $k \geq p$ . Parmi ces topologies, la structure  $p$ -régulière est celle de coût minimal.*

(Voir démonstrations en annexe 2.5.9).

La structure de coût dans le réseau en étoile est déséquilibrée, le centre supporte un coût égal à  $(2p-1)\bar{c}$  alors que les  $(2p-1)$  autres participants ne supportent qu'un coût égal à  $\bar{c}$ . Ce type de structure n'est donc pas stable deux à deux au sens de Jackson et Wolinsky (1996). L'ensemble des réseaux  $p$ -réguliers garantit un coût minimum identique pour chaque joueur, pour un coût agrégé de  $2p^2\bar{c}$ . Cette structure nous éloigne de l'efficacité agrégée car elle ne permet pas la minimisation du total des coûts supportés par le réseau.

Nous faisons donc face à une alternative entre stabilité et efficacité en terme de coûts. Le seul réseau fortement efficace n'est en effet pas stable deux à deux. Le réseau  $p$ -régulier assure une division des coûts égalitaire minimale entre les joueurs, cependant en termes agrégés cette structure n'est pas efficace. Le recours à une fonction valeur et à une règle d'allocation nous permet de mettre en évidence une unique classe de réseau permettant à la fois la décentralisation de l'allocation, et, une distribution égalitaire des coûts entre les joueurs.

#### 2.4.4 Solution stable Pareto améliorante

Le constat précédent nous conduit à nous interroger sur la possibilité d'atteindre une situation stable qui soit également Pareto améliorante. Une amélioration au sens de Pareto consisterait ainsi à subventionner la banque au centre de l'étoile afin qu'elle remplisse son rôle de noeud distributeur de liquidité tout en garantissant que le réseau ainsi obtenu soit stable deux à deux. Cependant, il ne suffit pas de subventionner la banque au centre pour la placer seulement au niveau de réservation qu'elle obtiendrait sous la distribution égalitaire optimale qu'est le réseau  $p$ -régulier.

En effet, dans un réseau en étoile à  $2p$  sommets, la banque au centre supporte un coût de  $(2p - 1)\bar{c}$ . Dans un réseau  $p$ -régulier, toute banque supporte un coût de  $p\bar{c}$ . La subvention totale touchée par la banque au centre de l'étoile pour se placer au niveau de réservation qu'elle obtiendrait dans le réseau  $p$ -régulier est donc de  $(p - 1)\bar{c}$ , soit une subvention par banque de la périphérie de  $\frac{(p-1)}{2p-1}\bar{c}$  versée au centre. En ce cas le réseau n'est pas stable deux à deux. En effet, en rompant un lien, le centre économise le coût direct qui lui est associé  $\bar{c}$ , alors que la banque partenaire ne lui verse que  $\frac{(p-1)}{2p-1}\bar{c}$ . Il y a donc toujours un intérêt pour la banque au centre à rompre un lien. En conséquence, pour que le réseau soit stable deux à deux, il est nécessaire que la banque au centre reçoive une compensation complète pour le coût associé à chacun des liens qui l'unit à une banque de la périphérie. En ce cas, le coût associé à ce réseau est nul pour la banque au centre, et égal à  $2\bar{c}$  pour chacune des banques de la périphérie. Le coût total associé au réseau est inchangé. Il n'y a qu'un transfert de coût du centre vers la périphérie. Cette situation est trivialement stable deux à deux : aucune banque de la périphérie n'a intérêt à rompre un lien au risque de se trouver illiquide, et pour le centre les liens sont sans coût.

## Conclusion

Nous analysons ici un modèle de prêts interbancaires réalisés au travers d'un réseau de conventions ouvertes de crédits interbancaires. Les banques tirent avantage de leur participation dans le réseau par rapport au cas autarcique dans la mesure où cette intégration leur permet d'accroître le montant des ressources investies dans l'actif productif de long terme. Cependant, un tel résultat dépend clairement de la topologie du réseau en place. Toutes les architectures ne sont pas équivalentes.

Dans un cadre général avec  $2p$  banques, pour discriminer entre toutes les structures de réseaux possibles, nous pouvons nous appuyer sur deux outils : une caractérisation en terme de distance, et, une caractérisation directe en terme de topologie. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau décentralise l'allocation de premier rang sans faillite est que la distance entre deux banques soit au maximum de 2. Cette condition donne donc une fondation théorique à l'idée de " petit monde " financier qui a émergé au fur et à mesure de la libéralisation financière. Cette condition sur la distance exclut un grand nombre de structures comme les réseaux en ligne ou les réseaux circulaires, mais un grand nombre d'architectures est encore possible. Pour aller plus loin, nous nous sommes donc intéressé à une caractérisation directe en terme de topologie de réseau. Celle-ci nous oblige cependant à restreindre notre analyse sur l'ensemble des réseaux symétriques. Ceci nous permet d'exhiber une classe de réseaux dits  $k$ -régulier avec  $k \geq p$  capables de décentraliser l'allocation optimale. Cette condition implique qu'une polarisation minimale est une condition nécessaire et suffisante pour améliorer le bien-être des déposants. Notre résultat théorique souligne que plus il y a de banques impliquées dans le réseau, plus le nombre de liens, tant au niveau agrégé que par banque, est élevé. Ces résultats se trouvent confortés par les faits stylisés sur la libéralisation financière où la croissance du nombre d'institutions financières s'est accompagnée d'une croissance plus que proportionnelle du nombre des relations de prêts interbancaires.

Lever l'hypothèse d'absence de coût d'accès au réseau, nous permet de raffiner les résultats. En effet, si les banques sont contraintes de payer un coût d'accès linéaire au réseau pour se connecter, il est possible de discuter des propriétés de stabilité deux à deux des réseaux. Ceci nous permet de souligner une opposition claire entre stabilité et efficacité des réseaux interbancaires. Le réseau efficace en termes agrégés, car il minimise le coût total, est le réseau en étoile. Cependant, il présente une structure de coûts déséquilibrés qui ne lui permet pas d'être stable deux à deux au sens de Jackson et Wolinsky (1996). Les réseaux  $p$ -réguliers en revanche sont stables deux à deux dans la mesure où chaque participant supporte le même coût. Ce coût est certes minimal par participant, mais il entraîne une inefficacité au niveau agrégé. Il est cependant possible de remédier à cette situation en considérant que les banques de la périphérie subventionnent le coût des liens pour le centre.

Deux questions restent encore non résolues à l'issue de ce second chapitre. D'une part, il reste un grand nombre de réseaux stables possibles que nous ne sommes pas en mesure de classer selon un critère d'efficacité relative. Nous proposerons, ainsi, dans le chapitre 3 une étude par simulations de Monte Carlo de manière à résoudre cette question. D'autre part, une question essentielle est celle de la transmission des événements systémiques -tels que définis en introduction- au long du réseau en fonction de l'architecture du réseau elle-même. Ce point sera l'objet du chapitre 4.

## 2.5 Annexes

### 2.5.1 Montant d'actif long terme qu'une banque peut liquider sans provoquer de course à la banque

Considérons tous les réseaux avec au moins une banque isolée. Dans cette dernière, les réserves liquides sont limitées à  $\gamma C_1^*$ . Avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , la banque est touchée par le choc haut. Son déficit de liquidité (qui s'élève à  $(\lambda_h - \gamma) C_1^*$ ) ne peut pas être couvert par toute autre banque par un prêt dans la mesure où elle est isolée. La seule solution pour la banque est donc de liquider une partie de son actif de long terme. La banque doit offrir aux consommateurs tardifs au moins  $C_1^*$  à la date 2, dans le cas contraire ces derniers seraient incités à retirer leurs dépôts en  $t = 1$ . Dès lors, une banque avec une fraction  $\lambda_h$  de consommateurs précoces peut liquider par anticipation au plus une part  $\alpha$  de ses actifs de long terme tels que :

$$R(k^* - \alpha) = (1 - \lambda_h)C_1^*$$

Le montant d'actif long qui peut être liquidé par anticipation sans conduire à une course à la banque est donc

$$\alpha = k^* - \frac{(1 - \lambda_h)C_1^*}{R}$$

Cette liquidation précoce produit  $r$  unités de liquidité par unité liquidée en  $t = 1$ . Toute banque isolée peut donc obtenir un montant maximal  $\beta(\lambda_h)$  sans conduire à une course à la banque avec

$$\beta(\lambda_h) = r \left( k^* - \frac{(1 - \lambda_h)C_1^*}{R} \right)$$

Si

$$(\lambda_h - \gamma) C_1^* > \beta(\lambda_h) \tag{2.19}$$

alors la banque fait face à une course et est conduite à la faillite. Nous considérons que cette dernière condition est satisfaite.

En conséquence, toute banque isolée ne peut pas mettre en œuvre l'allocation optimale sans courir le risque d'être en faillite avec une probabilité non nulle. Toute banque isolée doit donc mettre en œuvre l'allocation autarcique. Tout réseau avec au moins une banque isolée ne décentralise donc pas l'allocation optimale sans faillite.

### 2.5.2 Démonstration de la proposition 1

La banque  $i$  met en œuvre l'allocation suivante :

$$\begin{aligned}(b^i, k^i) &= (b^*, k^*) \\ (C_1^i, C_2^i) &= (C_1^*, C_2^*)\end{aligned}$$

où  $(b^*, k^*, C_1^*, C_2^*)$  l'allocation du planificateur bienveillant.

La structure particulière du réseau implique que toutes les banques sont liées (il y a une seule composante). L'excès total de demande de liquidité dans le réseau vaut donc  $D$ .

$$\begin{aligned}D &= 2(\lambda_h C_1^* - b^*) \\ &= (\lambda_h - \lambda_l) C_1^*\end{aligned}$$

L'excès d'offre de liquidité dans le réseau vaut  $L$  :

$$\begin{aligned}L &= 2(b^* - \lambda_l C_1^*) \\ &= (\lambda_h - \lambda_l) C_1^*\end{aligned}$$

Ces résultats soulignent l'absence d'incertitude agrégée sur le niveau de liquidité nécessaire dans le réseau en  $t = 1$ . La chambre commune compense en ( $t = 1$ ) les excès de demande et d'offre de liquidité. Toutes les banques sont en mesure de faire face aux demandes de leurs déposants sans liquider d'actif de long terme tout en ne conservant que le montant du choc moyen en réserve. Le risque de faillite dans le réseau est nul en  $t = 1$ .



En  $t = 2$ , les transferts de fonds empruntent le sens inverse des flux de la période précédente, les banques emprunteuses payent  $(1 - \lambda_h)C_2^*$  à leurs déposants longs, et remboursent le prêt contracté à la banque prêteuse augmenté des intérêts ; ce qui s'élève à  $(1 + r_1 + \rho)(\lambda_h - \gamma)C_1^*$ .

La seule ressource dont elles disposent est le rendement de l'actif long terme.

La contrainte budgétaire de la banque emprunteuse est donc :

$$(1 - \lambda_h)C_2^* \leq Rk^* - (1 + r_1 + \rho)(\lambda_h - \gamma)C_1^* \quad (2.20)$$

La contrainte budgétaire de la banque prêteuse est :

$$(1 - \lambda_l)C_2^* \leq Rk^* + (1 + r_1 + \rho)(\gamma - \lambda_l)C_1^* \quad (2.21)$$

Avec

$$1 + r_1 + \rho = \frac{C_2^*}{C_1^*} \quad (2.22)$$

Les contraintes (2.20) et (2.21) sont saturées. Le taux d'intérêt est complètement déterminé par le côté long du modèle jusqu'à un niveau compatible avec la non-faillite sur le côté court. Il n'y a donc aucune faillite ni en  $t = 1$  ni en  $t = 2$ . La prime de risque est donc ramenée à zéro, et on a :

$$1 + r_1 = \frac{C_2^*}{C_1^*} \quad (2.23)$$

Le marché interbancaire est un moyen de décentraliser l'allocation sans faillite du planificateur bienveillant, et le taux d'intérêt s'établit à  $1 + r_1 = \frac{C_2^*}{C_1^*}$ . Les opérations de prêts / emprunts sont compatibles avec les paiements aux déposants pour un niveau de taux d'intérêt qui égalise le taux marginal de substitution de la dette au taux marginal de transformation entre actif court terme et actif long terme.

### 2.5.3 Démonstration du lemme 1

Cette démonstration doit être traitée en 2 temps. D'une part, nous allons prouver que tous les réseaux dans lesquels la distance est plus grande que 2 ne décentralisent

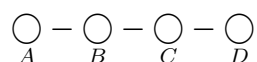
pas l'allocation optimale. D'autre part, nous montrerons que tous les réseaux avec une distance inférieure ou égale à deux décentralisent l'allocation optimale.

### **Première Partie :**

Considérons une économie à 4 régions dans laquelle la distance est plus grande que 2. Les structures de réseaux satisfaisants ces conditions sont : la ligne, et tous les réseaux à plusieurs composantes.

On sait déjà (voir annexe 2.5.1) que toute banque isolée ne peut mettre en œuvre l'allocation optimale sans courir un risque de faillite. L'ensemble des réseaux à plusieurs composantes ne permettent donc pas la décentralisation de l'allocation Pareto optimale.

Avec un réseau en ligne, dans les états  $S_1$  et  $S_2$  les banques sont groupées selon leur situation en regard de la liquidité.



Dans l'état  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) les banques  $A$  et  $B$  font face à un choc haut (respectivement bas), alors que les banques  $C$  et  $D$  font face à un choc bas (respectivement haut). Dès lors, les banques  $B$  et  $C$  sont en mesure de procéder à un échange de liquidité lors de la première étape pour atteindre l'état de banque équilibrée. Mais, à l'issue de l'étape 1, ces banques sont réceptrices mais non émettrices de signaux. Dès lors, à l'étape suivante, l'une des banques située à une extrémité de la ligne reste sur-liquide, alors que l'autre demeure illiquide. Cette dernière est donc conduite à la faillite.

Le réseau en ligne ne peut donc décentraliser l'allocation optimale sans faillite.

Dans tous les cas, les réseaux dont la distance est plus grande que 2 ne sont pas en mesure de décentraliser l'allocation optimale sans faillite.

### **Deuxième Partie :**

Considérons une économie à 4 banques dotée d'un réseau interbancaire dont la distance est inférieure ou égale à 2. Il s'agit des réseaux en étoile, du réseau circulaire,

ou du réseau complet.

En mettant en œuvre l'allocation optimale, les banques, faisant face à un choc haut, doivent se procurer un montant

$$d = (\lambda_h C_1^* - b^*)$$

Par hypothèse, les fonds ne peuvent venir de la liquidation anticipée de l'actif long puisque l'on a

$$(\lambda_h - \gamma) C_1^* > \beta(\lambda_h)$$

Dans le réseau circulaire, la probabilité pour toute banque illiquide d'avoir un voisin liquide est égale à un.

Deux cas se présentent : soit il n'y a pas de mauvaise allocation et il est possible de faire face aux besoins de liquidité ; soit il y a une mauvaise allocation après le premier tour d'échange de fonds. En ce cas, il reste dans le réseau une banque illiquide et une banque sur liquide séparée par un seul intermédiaire.

Par la propriété de chambre de compensation, les fonds sont transmis et il est possible de décentraliser l'allocation optimale sans faillite.

En tous les cas (bonne ou mauvaise allocation des fonds au premier tour) il est possible de décentraliser l'allocation Pareto optimale sans faillite.

On peut mener des démonstrations similaires pour les cas des réseaux complets, et de l'étoile. Les réseaux complets, en étoile, et circulaires décentralisent donc l'allocation Pareto optimale sans faillite dans une économie à quatre banques.

Par conséquent, tout réseau dans une économie à 4 banques, qui exhibe une distance inférieure ou égale à 2, décentralise l'allocation Pareto optimale sans faillite.

### 2.5.4 Démonstration du lemme 2

Pour prouver le lemme 2, on procédera par induction. Soit  $g_{2k}$  un réseau à une composante. Notons  $V_{2k}$  l'ensemble des banques de  $g_{2k}$ .

Au rang  $k = 1$ , le lemme 2 est trivialement vrai.

Considérons que au rang  $k = p$ , le lemme 2 soit vrai : Le réseau  $g_{2p}$  décentralise l'allocation Pareto optimale, et la distance entre deux nœuds quelconques est au maximum de 2.

Au rang  $k = p + 1$ , deux nœuds,  $i$  et  $j$ , ont été ajoutés quand on compare ce réseau avec le réseau  $g_{2p}$ .

Le graphe  $g_{2p+2}$  peut être divisé en 2 sous graphes,  $g_{2p}$  et le sous graphe de sommets  $\{i, j\}$ .

Comme

$$\forall (u, v) \in V_{2p} \times V_{2p}, u \neq v, \min_{u, v \in V_{2p}} d(u, v) \leq 2$$

le lemme 2 est vrai au rang  $k = p + 1$  si et seulement si

$$\forall u \in V_{2p}, \forall (i, j) \in V_{2p+2} \times V_{2p+2}, (i, j) \notin V_{2p} \times V_{2p} \quad \min_{u \in V(g), l=i, j} d(u, l) \leq 2$$

Par construction, une fois le choc de liquidité réalisé, on fait face à une situation où  $(p + 1)$  banques sont illiquides et  $(p + 1)$  sont liquides.

Considérons, en premier lieu, que  $i$  et  $j$  sont liquides. Dès lors  $(p - 1)$  banques dans le sous graphe  $g_{2p}$  sont liquides (banques de l'ensemble  $V_{2p}$ ). Il reste  $(p + 1)$  banques dans le sous graphe  $g_{2p}$  qui sont illiquides. Donc le sous graphe  $g_{2p}$  exhibe un excès de demande de liquidité. Dès lors, pour que le graphe  $g_{2p+2}$  décentralise l'allocation optimale sans faillite, la liquidité doit être transférée de  $i$  et  $j$  vers deux banques illiquides du sous graphe  $g_{2p}$ .

La liquidité est transférée dans le réseau soit quand une banque liquide et une banque illiquide sont directement liées, soit quand elles disposent d'un voisin commun équilibré. En terme de distance ceci implique :

dans le cas d'un lien direct

$$\forall (i, j) \in V_{2p+2} \times V_{2p+2}, (i, j) \notin V_{2p} \times V_{2p} \quad \min_{u \in V(g), l=i, j} d(u, l) = 1$$

dans le cas d'un transfert indirect :

$$\forall (i, j) \in V_{2p+2} \times V_{2p+2}, (i, j) \notin V_{2p} \times V_{2p} \quad \min_{u \in V(g), l=i, j} d(u, l) = 2$$

Dans tous les cas, la décentralisation de l'allocation optimale sans faillite dans le réseau  $g_{2p+2}$  implique donc

$$\forall u \in V_{2p}, \forall (i, j) \in V_{2p+2} \times V_{2p+2}, (i, j) \notin V_{2p} \times V_{2p} \quad \min_{u \in V(g), l=i, j} d(u, l) \leq 2.$$

Au rang  $(p + 1)$  le lemme 2 est vrai. Les cas dans lesquels  $i$  et  $j$  sont illiquides, ou ceux dans lesquels  $i$  est liquide et  $j$  illiquide sont isomorphes<sup>16</sup> aux cas où  $i$  et  $j$  sont liquides. Ceci implique que le lemme 2 est vrai pour tout  $p > 1$ .

### 2.5.5 Démonstration de la proposition 3

#### Démonstration de $i$ )

Considérons un réseau à plusieurs composantes. Soit  $c_1$  et  $c_2$  deux composantes du réseau.  $i$  est un nœud de  $c_1$  et  $j$  un nœud de  $c_2$ . Comme il n'y a pas de chemin  $i$  vers  $j$   $d(i, j) = \infty$  (la distance entre deux nœuds de deux composantes différentes est infinie).

Par le lemme 2, nous pouvons conclure que tout graphe à plusieurs composantes ne décentralise pas l'allocation optimale.

Il est évident que dans un réseau en ligne, ou un réseau circulaire la distance est plus grande que 2 (si il y a au moins 4 sommets).

Si  $u$  et  $v$  sont les extrémités d'un réseau en ligne à  $2p$  nœuds, alors la distance vaut  $2p - 1 > 2$ .

Considérons un réseau circulaire à  $2p$  nœuds.

Le diamètre d'un graphe est la distance maximale entre deux éléments de l'ensemble des sommets. Nous noterons le diamètre  $diam(u, v) = \max_{u, v \in V(g)} d(u, v)$ .

La distance entre les 2 nœuds les plus distants dans le réseau circulaire est  $p > 2$ .

Par le lemme 2, on peut conclure que les réseaux circulaires et en ligne ne peuvent pas décentraliser l'allocation optimale sans faillite.

---

<sup>16</sup>Un graphe isomorphe peut être défini comme suit : Notons  $g$  un graphe dont l'ensemble des sommets est  $V$  et l'ensemble des arêtes est  $E$ , et  $g'$  un graphe dont l'ensemble des sommets est  $V'$  et l'ensemble des arêtes est  $E'$ . Les graphes  $g$  et  $g'$  sont isomorphes si il existe une bijection  $\varphi : V \rightarrow V'$  avec  $ij \in E \iff \varphi(i)\varphi(j) \in E'$  pour tout  $i, j \in V$ . Une telle transformation  $\varphi$  est appelée un isomorphisme. Si  $g = g'$ , c'est un automorphisme.

**Démonstration de ii)**

Considérons 2 banques  $u$  et  $v$  appartenant au réseau en étoile à  $2p$  banques. Soit  $h$  le centre de l'étoile. Par définition, on a

$$\forall (u, v) \in V_{2p} \times V_{2p}, (u, v) \neq h, d(u, v) = 2$$

$$\forall u \in V_{2p}, u \neq h, d(u, h) = 1$$

Par le lemme 2, on sait que le réseau en étoile satisfait la condition nécessaire et suffisante pour décentraliser l'allocation Pareto optimale sans faillite. Ceci termine la démonstration.

**2.5.6 Démonstration de la proposition 4**

Pour prouver la proposition 4, il suffit de démontrer que les réseaux  $k$ -réguliers dans lesquels  $k \geq p$  vérifient le lemme 2. Nous raisonnerons pour ce faire par contradiction.

Soit un réseau  $k$ -régulier dans lesquels  $k \geq p$ . Supposons qu'il existe deux sommets  $i$  et  $j$  tels que  $d(i, j) > 2$ . Alors il existe un sommet  $u$  sur le chemin  $ij$  tel que  $u$  n'est incident ni à  $i$  ni à  $j$ . Comme  $i$  (respectivement  $j$ ) a au moins la moitié de la population comme voisins directs alors le voisinage de  $i$  (respectivement  $j$ ) est de cardinal au moins  $p$ .

Par hypothèse, si  $u$  appartient au voisinage direct de  $i$  alors il n'appartient pas au voisinage direct de  $j$  (et réciproquement).  $i$  est donc lié à au moins  $p$  sommets non incidents à  $j$ , et  $j$  est lié à  $p$  sommets non incidents à  $i$ . Les voisinages directs de  $i$  et de  $j$  comportent donc  $2p$  éléments distincts. Comme la taille de la population est  $2p$ , cela implique que  $i$  et  $j$  ont des voisins communs ce qui signifie  $d(i, j) = 2$  ce qui est contraire à notre hypothèse.

### 2.5.7 Démonstration de la proposition 5

Considérons un réseau quelconque dans lequel la banque  $i$  dispose de  $n_i$  liens. Sachant ce réseau donné, le programme à maximiser pour la banque  $i$  est le suivant :

$$\underset{b,k,C_1,C_2}{Max} \frac{1}{2} [\lambda_l U(C_1) + (1 - \lambda_l) U(C_2)] + \frac{1}{2} [\lambda_h U(C_1) + (1 - \lambda_h) U(C_2)] \quad (2.24)$$

sous les contraintes :

$$b + k + n_i \bar{c} \leq 1 \quad (2.25)$$

$$\gamma C_1 \leq b \quad (2.26)$$

$$(1 - \gamma) C_2 \leq Rk \quad (2.27)$$

$$C_1 < C_2 \quad (2.28)$$

Les CPO donnent :

$$\tilde{b} + \tilde{k} + n_i \bar{c} = 1 \quad (2.29)$$

$$\gamma \tilde{C}_1 = \tilde{b} \quad (2.30)$$

$$(1 - \gamma) \tilde{C}_2 = R\tilde{k} \quad (2.31)$$

$$U'(\tilde{C}_1) = R U'(\tilde{C}_2) \quad (2.32)$$

Pour décentraliser l'allocation Pareto Optimale, le réseau doit permettre de compenser les excès d'offre et de demande de liquidité et fournir un niveau de consommation identique selon les régions. De cette dernière condition, on peut conclure par identification que le réseau  $k$ -régulier permet d'égaliser les niveaux de consommation et par suite les montants de liquidité disponible dans les banques illiquides et les banques

sur-liquides. Pour un réseau  $k$ -régulier, l'allocation obtenue est la suivante :

$$\tilde{b} + \tilde{k} = 1 - k\bar{c} \quad (2.33)$$

$$\gamma\tilde{C}_1 = \tilde{b} \quad (2.34)$$

$$(1 - \gamma)\tilde{C}_2 = R\tilde{k} \quad (2.35)$$

$$U'(\tilde{C}_1) = RU'(\tilde{C}_2) \quad (2.36)$$

La situation à est donc identique à une constante près à la situation sans coût. Cette constante correspond au montant des coûts supportés par chaque banque pour se connecter à  $k$  voisins. La seule différence avec le cas sans coût est donc une différence de niveau de consommation pour les consommateurs de chacune des régions. Le réseau  $k$ -régulier décentralise donc trivialement l'allocation Pareto optimale avec coût.

### 2.5.8 Démonstration de la proposition 6

On est dans ce cas face à une double contrainte. La première repose sur la capacité du réseau à assurer les transferts de liquidités entre les régions illiquides et les régions liquides. La seconde porte sur la minimisation du coût agrégé. On procédera donc en deux étapes.

#### **Etape 1 : contrainte sur les niveaux de réserves pour garantir l'élimination du risque de liquidité**

Dans un réseau en étoile, la banque au centre reçoit toute la liquidité disponible après la répartition des chocs régionaux et la répartit vers les banques qui ont des besoins de liquidité. Sa structure par définition permet à la liquidité de transiter entre toute paire de banques prises deux à deux. La question qui se pose consiste donc seulement à déterminer les allocations qui permettent de garantir l'égalité des offres et demande de liquidité dans ce réseau. Les banques maximisent la même fonction objectif :

$$Max_{b,k,C_1,C_2} \frac{1}{2} [\lambda_l U(C_1) + (1 - \lambda_l) U(C_2)] + \frac{1}{2} [\lambda_h U(C_1) + (1 - \lambda_h) U(C_2)] \quad (2.37)$$



Avec comme contraintes pour la banque au centre :

$$b + k + (2p - 1)\bar{c} \leq 1 \quad (2.38)$$

$$\gamma C_1 \leq b \quad (2.39)$$

$$(1 - \gamma)C_2 \leq Rk \quad (2.40)$$

$$C_1 < C_2 \quad (2.41)$$

Mais avec les contraintes pour les banques de la périphérie :

$$b + k + \bar{c} \leq 1 \quad (2.42)$$

$$\gamma C_1 \leq b \quad (2.43)$$

$$(1 - \gamma)C_2 \leq Rk \quad (2.44)$$

$$C_1 < C_2 \quad (2.45)$$

Une contrainte supplémentaire pèse sur le système dans son ensemble, il est nécessaire que le réseau permettent une compensation exacte des besoins et des demandes de liquidité en termes agrégés. Cette contrainte était présente dans le cas sans coût mais sans incidence sur les montants alloués, dans un cas avec coût positif réparti de manière inégalitaire dans le réseau, elle contraint à modifier les allocations. Dès lors les CPO donnent pour la banque au centre :

$$\breve{b} + \breve{k} + (2p - 1)\bar{c} = 1 \quad (2.46)$$

$$\gamma \breve{C}_1 = \breve{b} \quad (2.47)$$

$$(1 - \gamma)\breve{C}_2 = R\breve{k} \quad (2.48)$$

et pour les banques de la périphérie :

$$\ddot{b} + \ddot{k} + \bar{c} = 1 \quad (2.49)$$

$$\gamma \ddot{C}_1 = \ddot{b} \quad (2.50)$$

$$(1 - \gamma) \ddot{C}_2 = R \ddot{k} \quad (2.51)$$

La banque au centre de l'étoile supporte un coût total de  $(2p - 1)\bar{c}$ . Elle dispose donc de moins d'unités à investir dans les actifs de court et de long terme par rapport aux banques de la périphérie. Pour garantir la compensation exacte des offres et demandes de liquidité dans le réseau, le centre est contraint de réduire le montant investi dans l'actif de long terme, on a :

$$\check{k} = \ddot{k} - 2(p - 1)\bar{c} \quad (2.52)$$

Pour garantir l'égalité agrégée des offres et demandes de liquidité, il est nécessaire que la banque au centre investisse relativement moins en actif de long terme que les banques de la périphérie. Cette dernière dispose de moins de ressources pour investir dans les actifs de court et de long terme. Or, les montants de demande de liquidité sont identiques entre les régions en espérance. Dès lors, la banque au centre ne peut offrir à ses consommateurs tardifs un montant de consommation identique à celui offert par les banques de la périphérie. Cette inégalité dans la distribution des coûts entre banques est à la source d'une inégalité des niveaux de consommation pour les déposants tardifs.

### **Etape 2 : contrainte sur les coûts**

Pour déterminer le réseau de valeur maximale, on considère les réseaux  $g$  permettant de compenser les excès et besoins de liquidité. On procède alors à la maximisation de  $\mu(g)$ , ce qui correspond à la minimisation des coûts totaux supportés par le réseau. Le coût étant une fonction linéaire du nombre de liens dans le réseau, on doit donc considérer des réseaux avec un nombre minimal de liens afin de minimiser le total des coûts directs. Les deux réseaux à une composante disposant d'un nombre minimal de liens sont les réseaux en ligne et le réseau en étoile. Par définition, le réseau en ligne ne

permet pas à la liquidité de transiter entre tout couple de banques prises deux à deux. Il n'est donc pas en mesure de compenser les excès d'offre et de demande de liquidité.

Considérons dès lors le réseau en étoile. Soit  $\varsigma$  la banque au centre du réseau. Le nombre de liens dans cette structure de réseau est minimal. Comme le coût total est une fonction linéaire du nombre de liens, le réseau en étoile  $g_{ss}$  minimise le coût total supporté par le réseau dans son ensemble.

En conséquence, la valeur engendrée par  $g_{ss}$ ,  $\mu(g_{ss})$  est supérieure à la valeur engendrée par tout autre réseau  $g'$ .

En conséquence,

$$\forall g' \in G, \mu(g_{ss}) > \mu(g')$$

ce qui implique que  $g_{ss}$  est le seul réseau fortement efficace.

### 2.5.9 Démonstration de la proposition 7

#### Démonstration de *i)* et *ii)*

Par la proposition 6, on a montré que le réseau en étoile est le seul réseau fortement efficace. Cependant, la structure des coûts supportée par le réseau en étoile est inégaleitaire. Le centre de l'étoile  $\varsigma$  supporte un coût égal à  $(2p - 1) \bar{c}$  alors que tous les autres participants au réseau ne payent que  $\bar{c}$ . En rompant le lien  $\varsigma j$ ,  $\varsigma$  réduit le montant du coût auquel il doit faire face tout en ayant toujours assez de liquidité pour faire face à ses propres besoins.

Dès lors pour  $\varsigma j \in g_{ss}$ ,  $Y_{\varsigma}(g_{ss} - \varsigma j, \mu) \geq Y_{\varsigma}(g, \mu)$ . Cependant, la situation de  $j$  a été modifiée, dans la mesure où la banque  $j$  se retrouve isolée du réseau. La valeur associée à cette situation pour  $j$  est celle de l'autarcie qui offre un niveau de bien être moindre par hypothèse.

Donc pour tout  $\varsigma j \in G$ ,  $Y_j(g_{ss} - \varsigma j, \mu) < Y_j(g_{ss}, \mu)$ .

En conséquence,  $g_{ss}$  n'est pas stable deux à deux.

**Démonstration de *iii*)**

De la proposition 5 on sait que le réseau  $p$ —régulier  $g_p$  décentralise une allocation Pareto optimale. En conséquence, il existe un profil de stratégie supportant  $g_p$ . De plus, pour tout  $ij \notin g_p$ ,  $Y_i(g_p + ij, \mu) = Y_i(g_p, \mu) - \bar{c}$  et pour tout  $ij \in g_p$ ,  $Y_i(g_p, \mu) > Y_i(g - ij ; \mu)$ . En effet, retirer un lien du réseau  $p$ —régulier fait qu'il n'est plus capable d'assurer la compensation des excès d'offre et de demande de liquidité avec une probabilité 1. De plus, ceci conduit à une répartition inégalitaire des coûts au sein du réseau, et fait que ce dernier ne décentralise dès lors plus une allocation Pareto optimale .



## **Chapitre 3**

### **Efficacité distributive des réseaux : une mesure par simulations**

## Introduction

1

L'analyse proposée au chapitre précédent nous a permis de mettre en évidence une caractéristique jusque là ignorée par la littérature. Pour que l'accès à un réseau de relations interbancaires soit en mesure d'améliorer la situation des déposants, c'est-à-dire de limiter les montants investis dans les actifs courts tout en évitant le risque de course à la banque, il est nécessaire que le réseau en question présente des caractéristiques particulières. Deux propriétés essentielles ont ainsi pu être démontrées. La première souligne que les réseaux doivent exhiber une structure dite de " petit monde " dans laquelle les intervenants sont liés par une courte chaîne d'intermédiaires. Cette propriété permet de caractériser tant les réseaux symétriques que les réseaux asymétriques. La seconde propriété met en évidence que les réseaux doivent avoir un certain nombre de partenaires (au moins  $p$  dans un réseau à  $2p$  sommets). Elle ne caractérise que les réseaux symétriques. Partant de ces propriétés, il est possible d'éliminer un grand nombre de structures qui ne permettent pas d'atteindre l'optimalité : réseaux circulaires, réseaux en ligne, réseaux dont la polarité mesurée par le degré est trop basse, et enfin, tous les réseaux à plusieurs composantes. Il demeure, néanmoins, dans la structure sans coût, un grand nombre de réseaux qui vérifient la propriété d'optimalité et il n'est pas possible de discriminer ces réseaux sur des critères d'efficacité théorique.

L'ajout d'un coût fixe à la création d'un lien lors de la période initiale,  $t = 0$ , offre, a priori, une réponse plus satisfaisante dans la mesure où elle permet d'exhiber une unique structure minimisant les coûts agrégés. Mais celle-ci ne remplit pas les conditions de stabilité deux à deux telles que définies par Jackson Wolinsky (1996). Au final, la seule structure stable deux à deux qui garantisse une règle de partage égalitaire est la structure  $p$ -régulière : c'est-à-dire la structure dans laquelle chaque sommet du réseau est lié à exactement  $p$  partenaires dans un réseau à  $2p$  sommets.

---

<sup>1</sup>Ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec Anton Granik (Reims Management School).

Fort de ce constat, il reste dans le cas sans coût un grand nombre de structures qui décentralisent l'allocation Pareto optimale. Nous allons dans ce chapitre nous doter de critères permettant de classer les réseaux selon un certain degré d'efficacité relative. Pour ce faire on se concentrera sur deux types d'efficacité. La première est une efficacité en terme de résultats. Elle renvoie à la capacité du réseau à équilibrer les besoins de liquidité des banques parties prenantes. La seconde est une efficacité en terme de processus. Elle renvoie au temps et au nombre de transactions nécessaires pour équilibrer les besoins de liquidité des banques intégrées dans le réseau. Les définitions précises des indicateurs sont données dans la section 3.1.2.

Dans ce chapitre, par des simulations au sein d'une économie interbancaire fictive, nous sommes en mesure de raffiner les résultats du chapitre 2. Nous montrerons ainsi que les classements d'efficacité relative des réseaux sont variables en fonction des critères d'efficacité utilisés. Quel que soit le critère utilisé, il apparaît que la croissance de la taille des voisinages<sup>2</sup> vient obérer les performances des réseaux sur tous les critères d'efficacité considérés.

Le plan de ce chapitre est le suivant : la première section présente le cadre d'analyse du modèle, les critères d'efficacité, les simulations et le mode de construction des matrices d'adjacence dans les réseaux  $k$ -réguliers ; la section 2 propose une analyse des résultats pour le cas des réseaux capables de décentraliser l'allocation Pareto optimale ; la section 3 se penche sur les résultats obtenus dans le cas où cette allocation n'est pas obtenue. Enfin, dans la section 4, nous nous penchons sur un cas particulier de réseaux  $k$ -réguliers. (Les annexes proposant les différents programmes sont présentées en fin de thèse après la conclusion générale).

---

<sup>2</sup>La taille du voisinage de la banque  $i$  est le nombre de conventions de crédit ouvert signé par la banque  $i$ . Alternativement on peut parler de degré de  $i$ .



## 3.1 Le modèle et les simulations

### 3.1.1 L'économie interbancaire

Le modèle utilisé est directement issu du chapitre précédent. Ce modèle servira de base à un ensemble de simulations sous Gauss visant à mesurer l'efficacité des différentes topologies de réseaux possibles.

Cette économie interbancaire fonctionne comme suit :

Le temps est discret, divisé en 3 intervalles  $t = 0, 1, 2$ . Chaque intervalle possède une épaisseur et est constitué de plusieurs périodes. Un unique bien stockable est disponible, il est considéré comme le numéraire. Il peut être consommé ou investi. En  $t = 0$ , les investissements peuvent être faits dans deux actifs seulement. Le premier actif est une technologie court terme de stockage. Une unité investie dans cette technologie à la date  $t$  produit une unité à la date  $t + 1$ . Le second actif est un actif de long terme illiquide. L'investissement dans cet actif ne peut être fait qu'à la date 0. Une unité investie en  $t = 0$  produit  $R > 1$  unités de bien à la période 2. Cependant, l'illiquidité n'est pas complète. Si l'actif de long terme est liquidé à la date intermédiaire, donc avant qu'il ne soit arrivé à maturité, il ne produit que  $r$  unités de bien de consommation, avec  $0 < r < 1$ . On fait l'hypothèse que la vente anticipée de l'actif long est une dépréciation physique, la valeur de liquidation pouvant être considérée comme la valeur "à la casse" de l'investissement.

L'économie est constituée de  $2p$  régions ex-ante identiques.  $p$  est un entier naturel strictement positif. On note  $V_{2p} = \{i_1, i_2, \dots, i_{2p}\}$  l'ensemble de ces régions. Dans chaque région existe une banque en monopole, les déposants sont immobiles, chaque banque est un sommet du réseau. Cette structure régionale peut être interprétée de différentes façons. Elle peut être vue comme un ensemble d'aires géographiques par exemple, ou comme un ensemble de branches spécialisées de l'industrie bancaire.

Chaque région est peuplée par un continuum de déposants ex-ante identiques. Chaque déposant est doté d'une unité de consommation en  $t = 0$  et ne reçoit aucune

dotation ultérieure. Les consommateurs ont des préférences standard à la Diamond Dybvig. Avec une probabilité  $\lambda$ , ce sont des consommateurs précoces qui ne valorisent que la consommation à la date 1. Avec une probabilité  $1 - \lambda$  ce sont des consommateurs tardifs qui ne valorisent que la consommation à la date 2. Les préférences des consommateurs sont donc données par

$$U(C_1, C_2) = \begin{cases} U(C_1) & \text{avec une probabilité } \lambda \\ U(C_2) & \text{avec une probabilité } 1 - \lambda \end{cases}$$

$C_t$  est la consommation à la date  $t = 1, 2$ .  $U$  est deux fois continûment dérivable, croissante et strictement concave.

La probabilité  $\lambda$  varie selon les régions.  $\lambda^i$  est la probabilité d'être un consommateur précoce dans la région  $i$ . Il y a deux valeurs possibles pour  $\lambda^i$  : une valeur haute, notée  $\lambda_h^i$ , et une valeur basse notée  $\lambda_l^i$ , avec  $0 < \lambda_l^i < \lambda_h^i < 1$ . La valeur prise par  $\lambda$  dépend de l'état de la nature,  $S_k$ . Dans chaque état de la nature, la moitié des régions connaît le choc haut et l'autre moitié le choc bas. Chaque région a la même probabilité ex-ante d'être confrontée à une forte demande de liquidité à la période intermédiaire, égale à un demi. La demande agrégée de liquidité est donc connue avec certitude ex-ante. La seule variable inconnue est la distribution de ces chocs entre les régions.

L'incertitude est levée en  $t = 1$ , quand l'état de la nature est révélé. En  $t = 1$  chaque consommateur connaît son type, ce qui est une information privée non observable.

Les banques sont liées les unes aux autres par un réseau interbancaire de conventions de crédit ouvertes de façon à réduire le montant investi dans les actifs courts non porteurs d'intérêt. Les contrats sont signés ex-ante, avant que la distribution du choc de liquidité ne soit connue. Une fois ces contrats signés au début de  $t = 0$ , les banques ne peuvent les rompre ou en signer de nouveaux. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'introduction d'un réseau de dettes interbancaires permet d'éliminer le risque lié à la distribution de liquidité et de décentraliser l'allocation optimale sous certaines conditions liées à la topologie du réseau.

En  $t = 0$ , dans une première étape, les banques encaissent les dépôts qui sont

identiques normalisés à une unité. Dans une deuxième étape, on impose une architecture de réseau. Ces structures peuvent être représentées par des graphes non dirigés dont les liens incarnent les conventions bilatérales de crédit ouvertes. Dans une troisième étape, les banques allouent leurs fonds de manière à mettre en oeuvre l'allocation Pareto optimale. Cette allocation conduit les banques à mettre en réserve liquide le montant moyen de liquidités.

En  $t = 1$  dans une première étape, l'état de la nature (c'est-à-dire la distribution du choc de liquidité) est révélé. La moitié des banques est soumise à un choc de liquidité haut, l'autre moitié à un choc de liquidité bas, si bien que le réseau interbancaire dans son ensemble ne fait face à aucun besoin de liquidité en termes agrégés. Le seul problème est celui de la distribution de la liquidité entre les membres. Dans une seconde étape, les opérations de prêts interbancaires ont lieu, les banques liquides prêtent les fonds dont elles disposent aux banques illiquides auxquelles elles sont liées. Dans une troisième étape, les consommateurs précoces retirent leurs dépôts.

En  $t = 2$  la dette interbancaire est remboursée enfin, les déposants tardifs retirent leurs dépôts.

Le coeur de la mesure de l'efficacité relative des différents réseaux repose sur le fonctionnement de l'économie interbancaire en  $t = 1$ . En effet, dans cet intervalle, une fois le choc révélé, les banques liquides signalent leurs besoins de liquidité auprès de leurs voisins directs. Les banques liquides contactées répondent à ce signal en transférant le montant de liquidité disponible vers l'un de leurs voisins illiquides. Le choix du débiteur est fait sur une base aléatoire. Il est donc possible qu'une banque illiquide ayant dans son voisinage plusieurs banques liquides reçoive plus de liquidité qu'elle n'en a réellement besoin pour satisfaire les besoins de ses déposants, alors même que d'autres banques restent, elles, illiquides. Une telle allocation maintient dans le réseau des banques qui disposent d'un excès de liquidité (banques sur-liquides), alors que d'autres banques restent, elles, illiquides. Face à cela, il est donc nécessaire de

procéder à un second tour d'échange de fonds. Lors de ce second tour, les banques sur-liquides et les banques illiquides signalent leur situation à leur voisinage, et de nouvelles opérations de prêts / emprunts ont lieu. Plusieurs banques peuvent à nouveau sélectionner des partenaires créditeurs identiques. Le processus se répète tant qu'il y a échange de fonds entre institutions. Chacun des tours d'échanges de fonds ici présenté sera considéré comme une période dans les résultats suivants.

### 3.1.2 Critères d'efficacité

Les critères d'efficacité choisis renvoient à deux éléments distincts. Le premier critère s'attache aux résultats. Il mesure la capacité du réseau à équilibrer les besoins de liquidité des banques illiquides à chacune des étapes de transferts de fonds que nous venons de décrire. Il s'agit de l'efficacité allocative. Sa définition formelle est la suivante :

**Définition 1** *Efficacité allocative : capacité d'un réseau à présenter un rythme de décroissance du nombre de banques illiquides élevé. Un réseau  $V^{(1)}$  sera plus efficace qu'un réseau  $V^{(2)}$ , si le nombre de banques par étape de fonctionnement du réseau passant du statut de banque illiquide à celui de banque équilibrée est plus élevé dans le réseau  $V^{(1)}$  que dans le réseau  $V^{(2)}$ .*

Notons que l'efficacité allocative peut être vue sous deux angles :

l'efficacité allocative moyenne compare le nombre moyen de banques passant de statut illiquide au statut équilibré en moyenne ;

l'efficacité allocative marginale compare la baisse du nombre de banques illiquides à la fin de chaque période.

Le second critère s'intéresse plus spécifiquement au processus d'échanges de fonds entre les banques tels qu'ils ont lieu de manière à équilibrer les besoins de liquidité. On doit en la matière considérer tant le nombre de transactions qui a lieu à chaque sous période [c'est l'efficacité transactionnelle] que le nombre de sous périodes au final nécessaire pour obtenir la décentralisation de l'allocation Pareto optimale [c'est l'efficacité

temporelle]. On peut les définir comme suit :

**Définition 2** *Efficacité transactionnelle : Capacité d'un réseau à atteindre l'allocation Pareto optimale en un nombre d'échanges réduit. Elle est mesurée par le nombre de transactions réalisé à chaque période. Plus ce nombre est faible, plus le réseau est efficace.*

**Définition 3** *Efficacité temporelle : capacité d'un réseau à décentraliser l'allocation Pareto optimale en un temps court. Elle est mesurée par le nombre moyen de périodes nécessaires à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale. Plus ce nombre est faible, plus le réseau est efficace.*

Ces deux critères sur les processus ne doivent pas être confondus. La multiplication des transactions au sein d'un réseau ne garantit pas nécessairement que celui-ci sera en mesure de décentraliser plus vite l'allocation Pareto optimale.

### 3.1.3 Le programme de simulations

Le modèle établi au chapitre second, et dont les traits essentiels ont été rappelés dans les lignes précédentes, nous sert de base pour la construction d'un programme reproduisant l'économie et dont l'objectif est tant de mesurer différents indicateurs concernant tant le processus de distribution de liquidité, que les résultats de ce processus sur la situation de liquidité des banques. Les programmes sont construits avec le logiciel Gauss 6.0.

Pour chaque topologie dont nous souhaitons mesurer l'efficacité, il est nécessaire d'établir un programme de simulations de Monte Carlo distinct. Chaque programme repose sur la matrice d'adjacence décrivant les liens entre les membres du réseau. On étudiera tant les réseaux capables de décentraliser l'allocation Pareto optimale, à savoir le réseau complet, le réseau en étoile, les réseaux  $k$ -régulier avec  $k \geq p$ , que les réseaux qui ne la décentralisent pas avec une probabilité 1, à savoir : le réseau circulaire, et les

réseaux  $k$ -réguliers avec  $k \leq p$ . Pour ces derniers réseaux, nous cherchons, en effet, à connaître l'ampleur des erreurs de distribution de liquidité entre les participants ainsi qu'à étudier les cas dans lesquels pour des raisons de structure ou de distribution particulière des chocs l'allocation Pareto optimale est au final décentralisée.

Plusieurs jeux de simulations sont menés, en modifiant deux variables : la taille des réseaux, et les structures de matrices d'adjacence. La modification de l'ampleur des chocs hauts et bas ne modifie en rien les résultats. On ne présentera donc pas de résultats en faisant varier ces derniers. On considère des réseaux à 30, 100 et 500 banques afin de dégager les effets liés à la taille du réseau. Puis, pour chacune des tailles considérées, on fait varier les structures d'adjacence : réseaux complets, circulaires, en étoile, et  $k$ -réguliers. On se concentre donc sur les réseaux à une composante<sup>3</sup> qui sont les seuls susceptibles de décentraliser l'allocation Pareto optimale. Les principaux résultats analysés dans le corps du texte sont les résultats pour le réseau à 100 banques. Les résultats des simulations pour les réseaux à 30 et 500 banques sont présentés en annexe, nous y ferons néanmoins référence lorsque des effets liés à la taille ont pu être. Les différents programmes sous Gauss sont également présentés en annexe. Les simulations sont conduites 10 000 fois.

A chaque type d'efficacité correspond un indicateur :

- Pour mesurer l'efficacité temporelle, on s'appuiera sur le nombre de périodes nécessaires pour atteindre la situation Pareto optimale.

- Pour mesurer l'efficacité allocative, on s'appuiera sur le nombre de banques encore illiquides à la fin de chaque sous période.

- Pour mesurer l'efficacité transactionnelle, on s'appuiera sur le nombre de transactions enregistrées à chaque période.

Pour chaque indicateur, le programme nous donne la moyenne ( $\mu$ ), l'écart type ( $\sigma$ ), et les valeurs extrêmes (maxima et minima). L'algorithme suit les étapes de construction présentées à la figure 3.1.

---

<sup>3</sup>c'est à dire un graphe connexe dans lequel la distance entre chaque paire de sommets est finie.

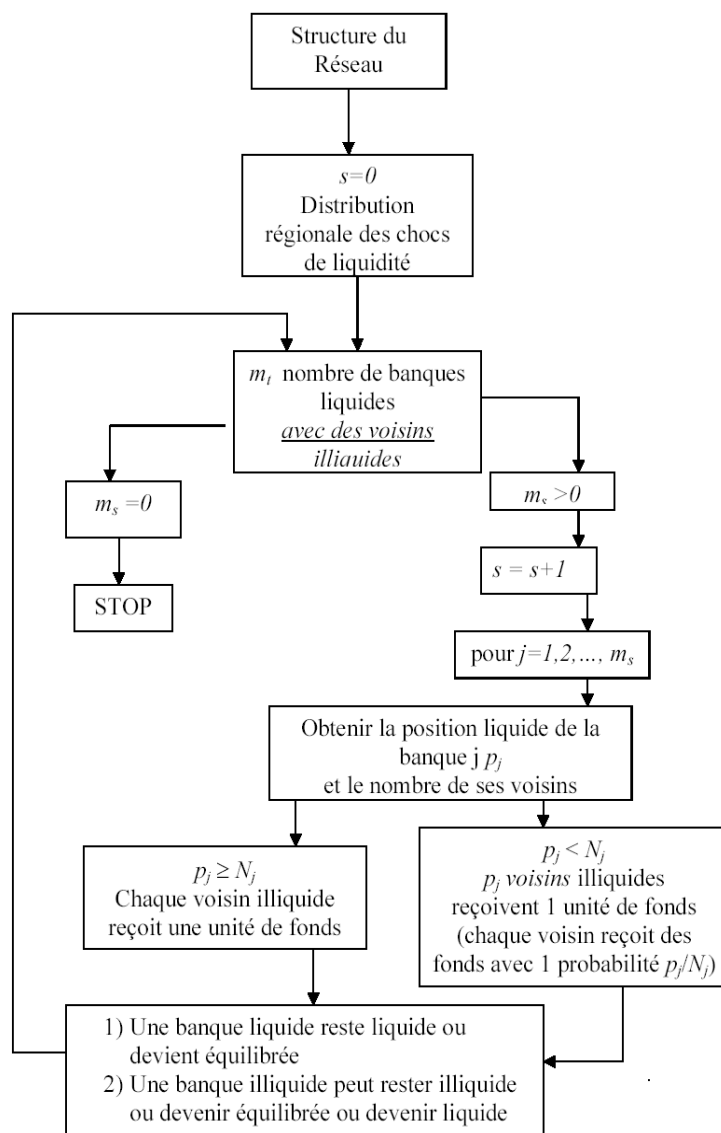


FIG. 3.1 – Structure générale de l'algorithme

La construction des matrices d'adjacence pour les réseaux en étoile, complets, et circulaires est simple. En revanche, la construction des réseaux  $k$ -réguliers suppose un certain nombre de conditions précises afin que les réseaux établis soient quelconques et n'exhibent pas des propriétés particulières. La section suivante propose plus en détails le mode de construction de la matrice d'adjacence dans les réseaux  $k$ -réguliers afin

que ces derniers soient quelconques.

### 3.1.4 Construction des réseaux $k$ –réguliers

Afin de mesurer l’effet de la taille des voisinages sur l’efficacité du réseau plusieurs simulations sont réalisées en faisant varier  $k$ . La construction des réseau  $k$ –réguliers est plus complexe et a nécessité le recours à un programme plus évolué. Dans un tel réseau, chaque banque dispose de  $k$  partenaires exactement. Le choix de ces partenaires doit être réalisé de manière tout à fait aléatoire. Les choix des banques quant à leur partenaires ne sont pas indépendants les uns des autres. Il a été nécessaire de construire la matrice d’adjacence sommet par sommet en tenant compte de cette contrainte. Le programme se décompose donc en plusieurs phases, chacune d’entre elle correspondant à la construction des arêtes pour un sommet particulier.

Dans une première phase, un premier sommet est sélectionné dans l’ensemble des  $2p$  sommets du réseau, sur la base d’une probabilité de sélection uniforme. On tire alors de manière aléatoire  $k$ –sommets parmi  $(2p - 1)$  avec lesquels les arêtes sont construites. Le réseau dispose à l’issue de cette étape d’un sommet de degré  $k$ , de  $k$  sommets de degré 1 et de  $(2p - k - 1)$  sommets de degré 0.

Dans une seconde phase, un second sommet est sélectionné sur la base d’une probabilité uniforme au sein des  $(2p - 1)$  sommets de degré strictement inférieur à  $k$ . Si le sommet sélectionné est de degré 0, on tire de manière aléatoire  $k$  sommets partenaires parmi les  $2p - 2$  sommets restants. Si le sommet sélectionné est de degré 1, on procède au tirage de  $k - 1$  partenaires seulement. La procédure se répète sommet par sommet. Aux étapes ultérieures, le tirage d’un sommet pour lequel les liens vont être construits est réalisé dans l’ensemble des sommets dont le voisinage est de taille inférieure à  $k$  à l’étape précédente. A chaque étape, la sélection des  $k$  partenaires se fait également dans l’ensemble des banques pour lesquelles le voisinage est de taille inférieure à  $k$  à l’étape précédente. Lorsque tous les sommets sont liés à  $k$  partenaires exactement la procédure s’arrête.



## 3.2 Efficacité relative des réseaux décentralisant l'allocation Pareto optimale

### 3.2.1 Efficacité temporelle

L'efficacité temporelle est mesurée par le nombre de périodes moyen nécessaires à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale. Cet indicateur est mesuré par la variable  $NP$ . Selon les topologies, on obtient les résultats suivants, dans le cas d'un réseau à 100 banques :

TAB. 1 – Efficacité temporelle

$NP$	Etoile	50-régulier	Complet	Etoile contrainte
$\mu_{NP}$	3,679	4,30	4,31	5,293
$\sigma_{NP}$	1,68	0,54	0,54	0,54

$NP$  donne le nombre de périodes pendant lesquelles il y a échanges de fonds dans le réseau.  $\mu_{NP}$  est la moyenne observée de cette variable. Elle indique la durée moyenne nécessaire pour décentraliser l'allocation Pareto optimale.  $\sigma_{NP}$  est l'écart type observé de la variable  $NP$ .

On considère trois types de réseaux : l'étoile, les réseaux  $k$ -réguliers, le réseau complet, et un réseau dit en étoile contrainte dans lequel on contraint la situation initiale de la banque au centre comme étant toujours en situation d'excès de liquidité, en d'autres termes le centre de l'étoile est touché par le choc bas.

#### Réseaux en étoile

Sur la base de cette mesure, le réseau en étoile apparaît être celui dans laquelle l'efficacité temporelle est la meilleure. En effet, dans le réseau en étoile, la structure permet de limiter le nombre de périodes d'échanges de fonds dans la mesure où le centre de l'étoile joue le rôle de chambre de compensation générale pour l'ensemble des banques de la périphérie. Son rôle est comparable à celui de la " chambre commune " walrasienne présentée au chapitre 2 à la différence près que le centre exhibe un besoin

ou un excès de demande de liquidité alors que la chambre walrasienne qui n'est que le lieu de la compensation des excès d'offre et de demande de liquidité enregistrés par ailleurs dans le réseau.

Si l'on compare le réseau en étoile quelconque au réseau en étoile contraint, on observe un écart de 1,6 unités en moyenne pour le nombre de périodes nécessaires pour décentraliser l'allocation Pareto optimale. Cet écart est expliqué en partie par la contrainte que l'on fait peser sur le centre lors de la sous période initiale. Lorsque cette dernière est liquide, en effet, elle transfère sa liquidité vers un partenaire illiquide de la périphérie lors d'une première période, puis elle joue le rôle de chambre de compensation dans une seconde période, et les besoins de liquidité des autres banques de la périphérie ne sont couverts que dans une troisième étape. En revanche, dans le cas où la banque au centre est illiquide, elle reçoit la liquidité de toutes les banques liquides de la périphérie lors de la première étape, puis elle réalise la distribution vers les banques illiquides de la périphérie dès la seconde étape. Dès lors, on ajoute de manière systématique une période à la durée de l'échange de fonds. Ceci nous laisse donc un écart inexpliqué de 0,6 périodes. Celui-ci est lié à la taille du réseau<sup>4</sup>. En effet, si on compare les résultats obtenus dans le cas du réseau à 30 banques (voir résultats en annexe), on peut observer que l'écart entre l'étoile contrainte et l'étoile quelconque pour la durée moyenne d'échanges de fonds est de 1,034 unités.

La valeur de l'écart type de  $NP$  mesurée dans le réseau en étoile est trois fois plus élevée dans le cas de l'étoile que pour les autres réseaux. Cette différence provient également du rôle particulier joué par le centre, et de l'influence cruciale qu'y joue le statut de liquidité initial de cette banque, unique noeud d'échange de liquidité. Dans les autres réseaux, les compensations d'offres et de demandes de liquidité touchent plus d'une banque dès la première étape. C'est ce décalage qui explique la valeur de  $\sigma_{NP}$ . Si on contraint le statut de la banque au centre à être initialement liquide, on retrouve en effet la même valeur pour  $\sigma_{NP}$ .

---

<sup>4</sup>Nombre de banques participantes.

La croissance de la taille du réseau en étoile affecte bien moins que proportionnellement l'efficacité temporelle. En effet, le passage d'un réseau de 100 à 500 banques se traduit par une détérioration de 21,5% de l'efficacité temporelle (voir résultats en annexe).

### Réseaux $k$ -réguliers

Notons que dans tous les réseaux  $k$ -réguliers, la condition portant sur  $k \geq p$  est une condition suffisante mais non nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale. En effet, pour certaines valeurs de  $k < p$ , et pour certaines distributions des chocs, le réseau  $k$ -régulier peut décentraliser l'allocation Pareto optimale. Ainsi, dans le cas du réseau à 100 banques, les simulations montrent que, dans 99% des cas ou plus, le réseau construit décentralise l'allocation Pareto optimale pour  $k > 22$ . Dans le réseau à 30 banques, tout réseau  $k$ -régulier où  $k > 10$  décentralise l'allocation Pareto optimale dans au moins 99% des cas. Pour évaluer la sensibilité de l'efficacité temporelle à la taille des voisinages on considérera donc tous les réseaux  $k$ -réguliers qui décentralisent l'allocation Pareto optimale dans plus de 99% des cas.

Dans les réseaux de grande taille (100 et 500 participants), l'efficacité temporelle est très faiblement dégradée par la croissance de la taille des voisinages. L'efficacité temporelle est une fonction monotone faiblement décroissante de la taille des voisinages. Dans le réseaux à 100 banques, pour un voisinage de 22, la durée nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale [4,29] est sensiblement identique à la durée nécessaire dans le réseau complet<sup>5</sup> [4,31], soit une dégradation de moins de 0,5%. Cette situation faiblement est liée à la taille. En effet, dans un réseau à 30 banques, le passage de voisinages de 11 à un voisinage de 29 conduit à une dégradation de 1% de l'efficacité temporelle. Plus le réseau est grand moins la taille des voisinages joue un rôle déterminant dans l'efficacité de distribution. On peut en conclure que le réseau

---

<sup>5</sup>Le réseau complet est par définition le réseau  $k$ -régulier dans lequel la taille des voisinage est la plus élevée.

complet est, en regard de ce critère, sous optimal car il ne permet pas de minimiser le nombre de périodes moyen d'échange de fonds.

Néanmoins, pour tous les réseaux  $k$ —régulier les performances sont très similaires. Il n'est donc pas réellement possible de discriminer ces réseaux entre eux. Les réseaux ne sont pas différents significativement en terme d'efficacité temporelle. Quelle que soit la densité du réseau  $k$ —régulier, les nombres de périodes moyens pour atteindre l'état de distribution efficace sont très proches.

### Réseau complet

Le réseau complet exhibe une durée moyenne d'échanges de fonds intermédiaire entre l'étoile et l'étoile contrainte (4,31 dans le cas du réseau complet, contre 5,293 dans le cas du réseau en étoile contrainte et 3,679 dans le cas de l'étoile). L'écart type mesuré pour  $NP$  est identique à celui mesuré dans le cas de l'étoile contrainte.

### 3.2.2 Efficacité allocative

La mesure de l'efficacité allocative repose sur le nombre de banques restants illiquides à la fin de chaque période d'échanges de fonds. La variable observée pour cet indicateur est notée  $DL$ .  $DL_i$  est le nombre de banques encore illiquides à la fin de la période  $i$ . Selon les réseaux les résultats sont les suivants pour le réseau à 100 banques.

TAB. 2 – Efficacité allocative.

Etoile		$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$DL_6$
	$\mu_{DL}$	49	9,067	3,166	1,003	0,181	0,002
	$\sigma_{DL}$	0	9,07	3,3	1,19	0,41	0,04
Etoile contrainte							
	$\mu_{DL}$	49	17,885	6,251	1,944	0,347	0,003
	$\sigma_{DL}$	0	2,162	1,530	0,942	0,513	0,056
Complet							
	$\mu_{DL}$	18,234	6,354	1,991	0,36	0,004	0,001
	$\sigma_{DL}$	2,195	1,552	0,960	0,524	0,064	0,06
50—régulier							
	$\mu_{DL}$	18,11	6,34	2	0,36	0,002	0,001
	$\sigma_{DL}$	2,21	1,54	0,95	0,52	0,06	0,04

Une représentation graphique de la variable  $\mu_{DL}$  pour les différents types de réseaux nous permet une vision d'ensemble. On constate que les réseaux complets et  $k$ -réguliers disposent de la meilleure efficacité allocative marginale. Après chaque étape d'échanges de fonds, il reste dans ces réseaux moins de banques illiquides que dans les réseaux en étoile et en étoile contraint.

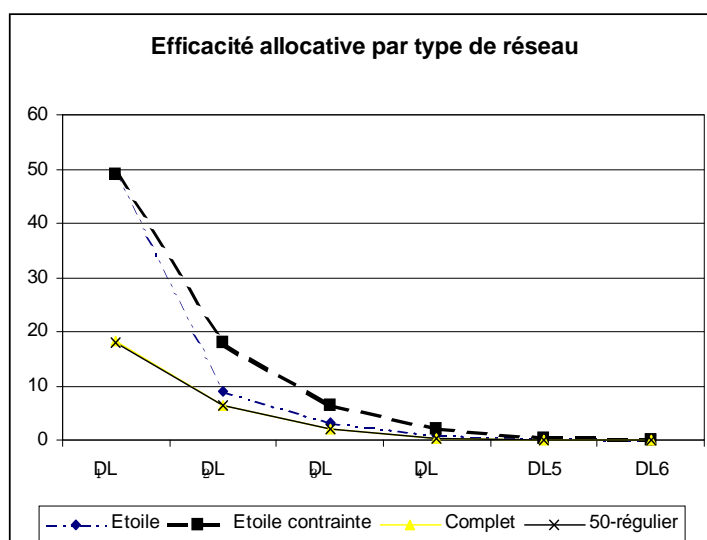


FIG. 3.2 – Décroissance du nombre de banques illiquides par structure de réseau

### Réseau en étoile

Dans le cas des réseaux en étoile, à la fin de la première période, il reste toujours exactement 49 banques illiquides dans le réseau. La distribution des chocs de liquidité crée 50 banques illiquides et 50 banques liquides. Les banques sont toutes connectées à la banque au centre, mais n'ont aucun lien entre elles. Si la banque au centre est initialement illiquide, les 50 banques liquides lui transfèrent leur liquidité disponible. Il reste donc au bout de la première période encore 49 banques illiquides. Si, en revanche, la banque au centre est liquide, il n'y a qu'un transfert de cette banque vers l'une de ses partenaires illiquides. Il reste donc bien encore également 49 banques illiquides à

l'issue de la première période. Ceci explique l'écart type nul pour  $DL_1$  tant pour l'étoile que l'étoile contrainte.

La différence notable dans la valeur des écarts types de la variable  $DL_2$  entre le réseau en étoile [9,07] et l'étoile contrainte [2,162] s'explique également par le caractère bimodal de la distribution. Si la banque au centre est contrainte à être toujours liquide, elle transfère lors de la première période sa liquidité disponible à une banque illiquide, et ne reçoit la liquidité des autres banques illiquides que lors de la période suivante. Restent donc systématiquement 49 banques illiquides à l'issue de la première période, et 48 banques illiquides à l'issue de la seconde période. En revanche, si le statut de la banque au centre est non contraint, et que celle-ci est illiquide, elle reçoit toute la liquidité disponible des autres banques au cours de la première sous période, et il reste 49 banques illiquides à l'issue de celle-ci, et lors de la seconde sous période elle réalise les transferts vers les autres banques illiquides. A l'issue de la seconde période il reste donc moins de banques illiquides en ce cas que dans le cas contraint. Quelle que soit la taille du réseau les effets liés à la bimodalité de la distribution se retrouvent.

Comme on l'observe à la figure 3.3, la taille n'a pas d'effet significatif sur le rythme de décroissance du nombre de banques illiquides rapportée à la taille totale du réseau.

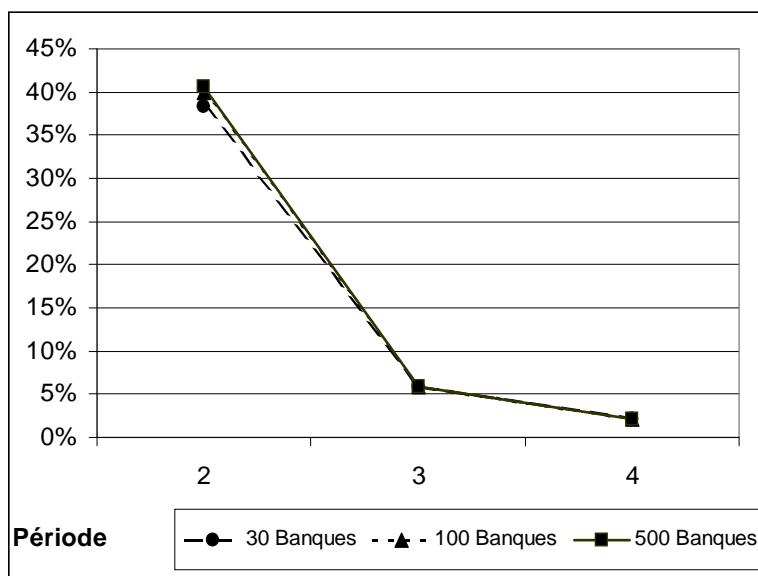


FIG. 3.3 – Rythme de décroissance du nombre de banques illiquides rapporté au nombre total de banques dans le réseau en étoile.

### Réseau complet

Pour le réseau complet, l'écart avec les réseaux en étoile est net pour la mesure de la décroissance du nombre de banques illiquides à la première période : l'efficacité allocative marginale de première période du réseau complet est bien supérieure à celle du réseau en étoile. En comparant l'étoile contrainte et le réseau complet, on observe un effet de décalage d'une période lié au rôle de chambre de compensation universel joué par le centre. Si l'on s'extrait de cet effet de décalage, on peut constater en effet que l'efficacité allocative du réseau complet est similaire à celle du réseau en étoile contraint, le nombre de banques encore illiquides à la fin de la période  $\chi$  dans le réseau complet n'est pas significativement différent du nombre de banques encore illiquides dans le réseau en étoile à la fin de la période  $(\chi + 1)$ .

Les effets liés à la taille sont proches de ceux constatés dans le cas de l'étoile. La croissance du nombre de périodes nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale est moins que proportionnelle à la croissance du nombre de banques dans le

réseau. Il n'y a pas d'effet lié à la taille sur le rythme de décroissance marginal du nombre de banques illiquides.

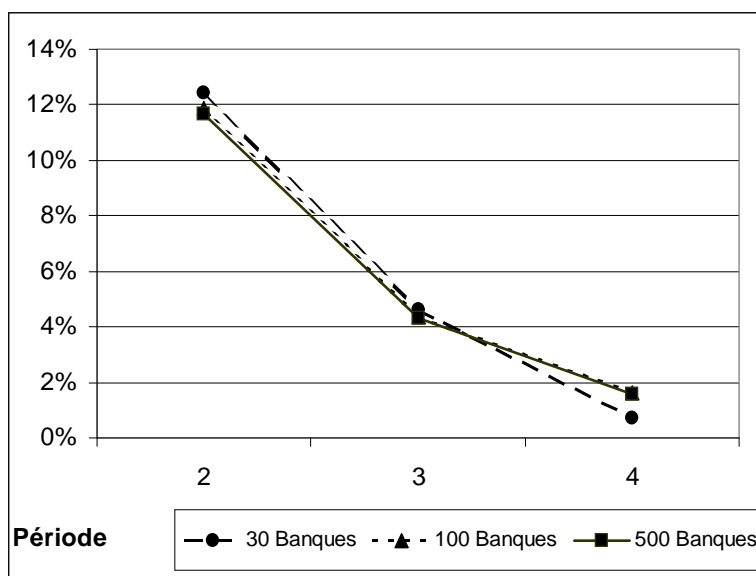


FIG. 3.4 – Rythme de décroissance du nombre de banques illiquides par rapport au nombre total de banques dans le réseau complet

Ce n'est pas la taille du réseau mesurée par le nombre de banques insérées dans le réseau qui influence l'efficacité allocative, mais la structure d'adjacence des liens entre les intervenants, et ce quelle que soit la structure en jeu.

### Réseaux $k$ -réguliers

Dans les réseaux  $k$ -réguliers, on observe que l'efficacité allocative de première période est une fonction croissante de la taille des voisinages des banques à chacune des périodes en jeu. Ce constat représenté à la figure 3.5 pour la période 1 demeure vrai pour toutes les périodes.

L'efficacité allocative est donc une fonction faiblement décroissante de la taille des voisinages. L'augmentation de la taille des voisinages conduit donc à une multiplication



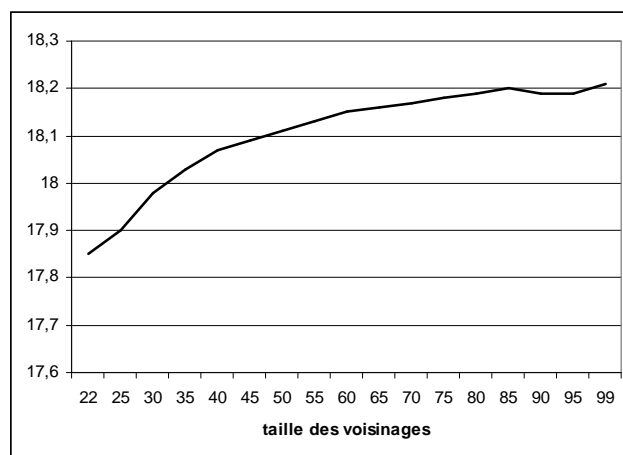


FIG. 3.5 – Nombre de banques illiquides à la fin de la première période en fonction de la taille des voisinages

des erreurs de transmission entre les banques. Il apparaît donc que sur ce critère, ce soit le réseau  $k$ –régulier avec  $k$  minimal qui obtienne la meilleure efficacité.

On doit également se pencher sur l'efficacité allocative moyenne. Celle-ci peut être calculée comme la moyenne du nombre de banques demeurant illiquides à la fin de chaque période pour l'ensemble des périodes lors desquelles il y a échanges de fonds entre les banques. Plus cette moyenne est basse, plus le réseau considéré est efficace dans la mesure où il permet alors en moyenne une allocation des fonds plus rapide entre les banques.

TAB. 3 – Efficacité allocative moyenne dans un réseau à 100 banques

Taille du voisinage	22	25	30	35	40	45	50	55	60
Efficacité Moyenne	5,282	5,298	5,32	5,336	5,35	5,354	5,362	5,368	5,374
Taille du voisinage	65	70	75	80	85	90	95	97	99
Efficacité Moyenne	5,374	5,378	5,38	5,386	5,386	5,388	5,388	5,389	5,39

Sur ce critère c'est le réseau qui exhibe le voisinage le plus réduit qui obtient la meilleure performance. La dégradation de l'efficacité allocative moyenne en fonction de la croissance de la taille des voisinages dépend de la taille du réseau en place. En effet, dans le réseau à 30 banques l'effet défavorable de la croissance de la taille des

voisinages est deux fois plus fort que celui constaté dans le réseau à 100 banques et 5 fois plus élevé que celui constaté dans le réseau à 500 banques.

Pour les réseaux  $k$ -réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale dans plus de 99% des cas, il n'y a pas de différence notable liée à la taille du voisinage pour les écarts types de distributions qui sont identiques quelle que soit la taille du voisinage choisi.

TAB. 4 – Mesure des écarts types dans les réseaux  $k$ -réguliers

	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$
$\sigma_{DL_i}$	2,21	1,54	0,95	0,52	0,06

### 3.2.3 Efficacité transactionnelle

L'efficacité transactionnelle se mesure à l'aune du nombre de transactions enregistrés à chaque période entre les banques. On note  $\tau_i$  le nombre de transaction enregistré dans le réseau au cours de la période  $i$ .

TAB. 5 – Efficacité transactionnelle

Etoile		$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
	$\mu_\tau$	25,126	49	9,067	3,166	1,003
	$\sigma_\tau$	24,5	0	9,07	3,3	1,19
Etoile contrainte	$\mu_\tau$	1	49	17,885	6,251	1,944
	$\sigma_\tau$	0	0	2,162	1,530	0,942
Complet	$\mu_\tau$	50	18,234	6,354	1,991	0,36
	$\sigma_\tau$	0	2,195	1,552	0,960	0,524
50-régulier	$\mu_\tau$	50	18,07	6,33	1,99	0,37
	$\sigma_\tau$	0	2,21	1,54	0,95	0,52

Dans le cas des réseaux décentralisant l'allocation Pareto optimale, la mesure du nombre de transactions à chaque période n'apporte aucune information supplémentaire par rapport à la mesure du nombre de banques illiquides à la fin de chaque période d'échanges de fonds utilisé pour le critère de l'efficacité allocative. En effet, du fait du processus même d'échange de fonds tel que décrit à la section 3.1.1, pour ces réseaux, le nombre de banques illiquides à la fin de la période  $\chi$  est égal au nombre de transactions

lors de la période  $(\chi + 1)$ . Ce constat n'est pas vérifié pour les réseaux ne permettant pas de décentraliser l'allocation Pareto optimale, comme nous le verrons dans la section 3.3.

### Réseau en étoile

Le cas du réseau en étoile illustre à nouveau la bi-modalité de la distribution, et les caractéristiques particulières liées au rôle du centre par lequel transitent tous les échanges de liquidité. Si la banque au centre est liquide, il n'y a qu'un unique transfert de fonds à la première période entre la banque au centre et une banque illiquide de la périphérie. Si la banque au centre est illiquide. Elle reçoit alors le versement de toute la liquidité disponible dans le réseau lors de la première période. Ce caractère spécifique explique les valeurs  $\mu_\tau$  et  $\sigma_\tau$  observées pour la première période. Pour les périodes ultérieures l'enchaînement est en tout point similaire à celui décrit pour la mesure de l'efficacité allocative avec un décalage d'une période.

### Les réseaux $k$ -réguliers et le réseau complet

On retrouve ici également les résultats obtenus pour la mesure de l'efficacité allocative. La croissance de la taille des voisinages vient réduire l'efficacité transactionnelle ; elle s'accompagne d'une hausse du nombre de transactions au sein de chaque période en moyenne. L'efficacité transactionnelle moyenne est calculée comme la moyenne des transactions enregistrées sur le nombre de périodes lors desquelles il y a échanges de fonds. Plus cette moyenne est élevée plus il y a de transactions dans le réseau. Il apparaît que le nombre de transactions est une fonction croissante de la taille des voisinages. L'effet est cependant limité, comme le montre le tableau suivant pour le réseau à 30 banques. On s'appuie à nouveau ici sur les réseaux décentralisant l'allocation Pareto optimale dans plus de 99% des cas.

TAB. 6 – Efficacité transactionnelle moyenne dans un réseau à 30 banques.

Taille du voisinage	11	12	13	14	15	16	17	18 ; 19
Efficacité Moyenne	5,473	5,485	5,493	5,498	5,505	5,508	5,513	5,52
Taille du voisinage	20	21	22	23	24 ; 25	26 ; 27	28	29
Efficacité Moyenne	5,523	5,525	5,528	5,53	5,533	5,535	5,540	5,540

Selon ce critère, le réseau complet est le réseau dans lequel il y a le plus d'échanges de fonds en moyenne. La croissance de la taille des voisinages s'accompagne, en effet, d'une augmentation des erreurs de distribution par les banques.

Selon les critères d'efficacité choisis, le classement des réseaux selon leurs performance est donc variable. Si l'on s'attache à l'efficacité temporelle, il apparaît que le réseau en étoile obtient les meilleurs résultats, alors que si l'on s'attache à l'efficacité allocative, les réseaux  $k$ -réguliers se comportent de façon plus efficace car il permet dès la première période de connaître une baisse plus significative du nombre de banques illiquides. Quel que soit le critère en revanche, la croissance de la taille des voisinages vient obérer l'efficacité des réseaux.

### 3.3 Efficacité relative des réseaux ne décentralisant pas l'allocation Pareto optimale

On s'attachera ici au réseau circulaire et aux réseaux  $k$ -réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale dans moins de 99% des cas. On adoptera ici une présentation par type de réseau, et non par efficacité. Il ne s'agit pas en effet de comparer les degrés d'efficacité des réseaux les uns par rapport aux autres mais de s'attacher à comprendre le fonctionnement de ces réseaux qui ne décentralisent pas l'allocation Pareto optimale.

#### 3.3.1 Le réseau circulaire

Pour le réseau circulaire à 100 banques, on obtient les résultats suivants pour les variables observées  $NP$ ,  $DL$  et  $\tau$ . On présentera pour chacune des variables observées

la moyenne ( $\mu$ ), l'écart type ( $\sigma$ ), et les valeurs maximales ( $Max$ ) et minimales ( $Min$ ) observées.

TAB. 7 – Réseau circulaire

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
$\mu$	1,923	21,127	17,150	35,472	2,467	0
$\sigma$	0,266	3,153	5,881	3,930	1,511	0
$Max$	2	37	35	47	9	0
$Min$	1	10	0	16	0	0

Du fait de la structure du réseau et du mode de distribution de la liquidité, la distribution est dégénérée. Dans le réseau circulaire, chaque banque dispose de 2 voisins. Il n'y a dès lors que deux périodes d'échanges de fonds. Lors de la première période les banques liquides transfèrent leurs excès de liquidité à l'un de leurs voisins directs illiquides. Dans la seconde période, les banques équilibrées disposant d'un voisin liquide à droite et d'un voisin illiquide à gauche, sont en mesure de jouer le rôle de chambre de compensation. Au delà de ces deux périodes, il n'y a plus d'échanges de fonds dans la mesure où la distance géodésique entre toute banque liquide et toute banque illiquide est strictement supérieure à 2.

Dès lors la durée d'échanges de fonds dans le réseaux ( $NP$ ) est en moyenne inférieure à 2, avec un écart type faible. En moyenne, ce réseau ne permet de couvrir que 55% des besoins totaux de liquidité dans le réseau. Remarquons que le nombre de transaction à la période  $\chi$  est ici différent du nombre de banques illiquides à la période  $(\chi - 1)$ . L'écart peut constituer une mesure de l'inefficacité du réseau. En effet, Cet écart permet de mesurer en partie les transactions qui ne permettent pas de combler de nouveaux besoins de liquidité au cours du processus. Il faut également remarquer que les bornes supérieures des variables  $DL_1$  et  $DL_2$  sont supérieures dans le cas du réseau circulaire que dans le cas des réseaux permettant de décentraliser l'allocation Pareto optimale. Ceci souligne que le réseau circulaire est fortement dépendant de la distribution des chocs de liquidité, alors que les réseaux capables de décentraliser l'allocation Pareto optimale peuvent par leur structure dépasser la situation issue de la distribu-

tion initiale des chocs grâce à une circulation efficace de la liquidité entre les banques parties prenantes au réseau. Conformément à cette dépendance à la distribution des chocs de liquidité on remarque également que le réseau circulaire exhibe des valeurs d'écarts types plus élevées que dans toute autre structure décentralisant l'allocation Pareto optimale (à l'exception notable de l'étoile pour la variable  $DL_2$ )

### 3.3.2 Les réseaux $k$ –réguliers avec $k \leq p$

Dans la classe des réseaux qui ne vérifient pas l'efficacité distributive, il apparaît que le pourcentage de succès est une fonction croissante non linéaire de la taille du voisinage, comme on peut l'observer à la figure 3.6

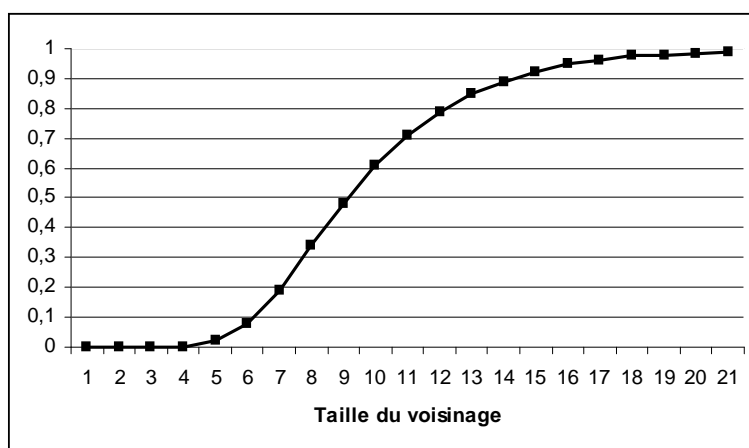


FIG. 3.6 – Taux de décentralisation de l'allocation Pareto optimale en fonction de la taille des voisinages

Pour des voisinages plus grands que 4, il apparaît des cas dans lesquels l'allocation Pareto optimale est décentralisée. Ces cas se produisent en raison d'une répartition particulière des chocs qui garantit une compensation des besoins de liquidités par les excès en dépit du fait que la structure ne permet pas théoriquement d'obtenir un tel résultat. Pour chacun des voisinages de taille  $\Omega$ , on désagrège donc les résultats en fonction de la variable  $\Xi$ , en notant  $\Xi = 1$  si le réseau décentralise l'allocation Pareto

optimale, et  $\Xi = 0$  sinon. On présente les résultats dans un tableau désagrégé des succès et échecs proposé au tableau 8.

TAB. 8 – Réseau  $k$ –régulier ne vérifiant pas l’efficacité distributive : tableau désagrégé des succès et échecs à 100 banques.

$\Omega$	$\Xi$	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
4	1	3,62	16,79	4,62	0,73	0,03	0	47,87	16,7	4,52	0,71	0,03
	0	3,14	16,86	6,78	4,21	0,76	0,02	47,25	14,43	2,51	0,22	0
5	1	3,83	16,74	5,2	1,12	0,08	0	48,75	16,67	5,08	1,1	0,08
	0	3,38	16,77	6,02	3,01	0,88	0,03	48,71	16,03	3,66	0,46	0,02
6	1	3,97	16,87	5,52	1,37	0,14	0	49,39	16,83	5,44	1,34	0,14
	0	3,53	16,84	5,88	2,5	0,87	0,04	49,4	16,65	4,47	0,68	0,03
7	1	4,06	17	5,77	1,55	0,19	0	49,72	16,99	5,72	1,53	0,19
	0	3,63	16,96	5,9	2,28	0,85	0,05	49,73	16,91	5,04	0,85	0,04
8	1	4,13	17,13	5,9	1,66	0,23	0	49,87	17,12	5,87	1,65	0,23
	0	3,69	17,08	5,96	2,17	0,82	0,06	49,88	17,07	5,42	0,99	0,05
9	1	4,18	17,25	5,99	1,75	0,26	0	49,94	17,24	5,97	1,74	0,26
	0	3,72	17,19	6,01	2,12	0,8	0,06	49,95	17,15	5,69	1,09	0,06
10	1	4,21	17,33	6,05	1,81	0,28	0	49,98	17,33	6,05	1,81	0,28
	0	3,73	17,3	6,04	2,08	0,78	0,05	49,98	17,30	5,85	1,16	0,06
15	1	4,28	17,66	6,19	1,93	0,33	0	50	17,66	6,19	1,93	0,33
	0	3,73	17,63	6,15	2,03	0,74	0,04	50	17,63	6,14	1,34	0,04
20	1	4,29	17,81	6,24	1,96	0,34	0	50	17,81	6,24	1,96	0,34
	0	3,72	17,82	6,16	2,02	0,72	0,03	50	17,79	6,15	1,38	0,03
25	1	4,3	17,92	6,27	1,97	0,35	0	50	17,92	6,27	1,97	0,35
	0	3,71	17,7	6,19	2,05	0,71	0,03	50	17,77	6,18	1,33	0,03
30	1	4,3	17,98	6,29	1,98	0,35	0	50	17,98	6,29	1,98	0,35
	0	3,73	17,73	6,12	2,03	0,73	0,03	50	17,73	6,12	1,4	0,03
35	1	4,3	18,03	6,31	1,98	0,36	0	50	18,03	6,31	1,98	0,36
	0	3,75	17,76	6,33	2,13	0,75	0,05	50	17,76	6,33	1,59	0,05
40	1	4,3	18,07	6,33	1,99	0,36	0	50	18,07	6,33	1,99	0,36
	0	3,69	17,59	6,28	1,95	0,69	0	50	17,59	6,28	1,26	0
45	1	4,3	18,09	6,33	1,99	0,36	0	50	18,09	6,33	1,99	0,36
	0	3,68	18,18	6,18	2	0,68	0,05	50	18,18	6,18	1,36	0,05

Les réseaux avec une connectivité basse (i.e. un voisinage faible) sont très efficaces lorsqu’ils parviennent à décentraliser l’allocation optimale. Il suffit en effet en moyenne de 3,62 périodes pour atteindre l’efficacité distributive dans le cas du réseau 4–régulier, lorsque celle -ci est atteinte. Par comparaison, 4,31 périodes sont nécessaires dans le

réseau 50-régulier. Cette efficacité tient cependant à la distribution des chocs et à la structure du réseau. En effet, la réduction du degré de chaque noeud permet de réduire les erreurs de transmissions au cours de périodes d'échanges de fonds. Il faut noter dans le cas où l'allocation Pareto optimale est décentralisée, que le nombre de banques illiquides à la fin de la période  $i$  est égal au nombre de transactions lors de la période  $i + 1$ . Cette égalité n'est pas vérifiée dans le cas des réseaux ne décentralisant pas l'allocation Pareto optimale. En ce cas, le nombre des transactions à la période  $i + 1$  est toujours inférieur au nombre de banques illiquides à la fin de la période  $i$ . Les transactions effectuées ne permettent donc pas de couvrir les besoins de liquidité constatés au sein du réseau. Plus la taille des voisinages est faible plus cet écart se manifeste de manière précoce, et donc plus il y aura au final de banques dont les besoins de liquidités ne seront pas couverts. Pour des voisinages de taille inférieure à 10, l'écart se mesure dès la première période. Pour des voisinages entre 11 et 17, l'écart n'apparaît qu'à la seconde période, au-delà et jusqu'à un voisinage de 49 l'écart ne concerne que les périodes 3, 4 et 5. Il est en ce cas assez faible soulignant bien que les performances du réseaux en terme de distribution de la liquidité sont assez proches de celle des réseaux qui décentralisent l'allocation Pareto optimale. Ces conclusions se retrouvent dans le cas du réseau à 30 banques comme le souligne le tableau (9) de l'annexe 3.4.1.

### 3.4 Etude d'un cas particulier de réseau $k$ -régulier

Un cas particulier des réseaux  $k$ -réguliers souligne nettement l'effet de la structure sur l'efficacité de la distribution de la liquidité. La matrice d'adjacence de ces réseaux ne suit pas la procédure de construction telle que décrite dans la section 3.1.4.



### 3.4.1 Construction des réseaux $k$ -réguliers particuliers

Il ne s'agit pas de construire des réseaux quelconques mais au contraire des réseaux dans lesquels les liens sont polarisés. On procède comme suit.

Les banques sont situées sur un cercle et numérotées de 1 à  $2p$ . La procédure impose que la banque  $i$  se lie prioritairement à ses voisins directs. Ainsi, si l'on considère la banque  $i = 50$ , dans un réseau 20-régulier les liens sont construits de manière symétrique à gauche et à droite de  $i$ , c'est à dire que la banque 50 se lie aux banques  $50 - j$ , et  $50 + j$  avec où l'entier naturel  $j \in [1, 10]$ . Le réseau ainsi construit est donc fortement polarisé autour de la banque  $i$ . Au cas où le nombre de liens  $k$  est impair on considère un nombre identique de liens pairs à droite et à gauche de  $i$ , et un dernier lien reliant la banque  $i$  à celle se trouvant diamétralement à son opposée sur le cercle. Pour un réseau 21-régulier par exemple, la banque  $i = 50$  se lie comme précédemment aux banques  $50 - j$ , et  $50 + j$  avec  $j \in [1, 10]$  et à la banque 100. Un exemple de ce type de graphe est donné par le réseau 3 régulier à 8 sommets proposé au chapitre précédent.

### 3.4.2 Décentralisation de l'allocation Pareto optimale et mesures d'efficacité

Si l'on choisit le cas d'un réseau  $k$ -régulier dans lequel  $k$  est impair, il est possible de décentraliser l'allocation Pareto optimale dans 100% des cas pour des voisinages inférieurs à  $p$ . Ainsi, dans un réseau à 100 banques, il suffit d'un voisinage de 33 pour être dans ce cas. Dans les réseaux  $k$ -réguliers quelconques il est nécessaire d'atteindre le réseau 50-régulier pour vérifier cette propriété. Aucune simulation, au delà de cette taille de voisinage ne permet pas de décentraliser l'allocation Pareto optimale. Avec ce type de structure, cette taille de voisinage (33) donne au réseau la propriété de distance proposée au lemme 2 du chapitre 2. La distance géodésique entre toute paire de banques est au maximum de 2.

On peut en outre vérifier par le logiciel UCINET 6.0 que, pour ce réseau régulier particulier à 100 banques, 33 est bien la taille de voisinage seuil au-delà de laquelle

la distance entre tout couple de banque pris deux à deux est inférieure ou égale à 2. Avec une telle structure, dans le cas 33-régulier, la distance géodésique moyenne entre deux banques est de 1,692. La matrice des distances géodésiques exactes donne des distances entre tout couple de banques quelconques, elles sont au maximum de 2. En revanche, pour un réseau 32-régulier, la distance moyenne est de 2,061 et la distance exacte entre tout couple de banques quelconque est au maximum de 4.

On peut donc penser que ce mode de construction des réseaux  $k$ -réguliers est globalement plus efficace dans la mesure où il permet de décentraliser avec certitude l'allocation Pareto optimale pour une taille de voisinage moindre que dans le cas quelconque pour lequel il est nécessaire de disposer d'au moins 50 partenaires par banque impliquée dans le réseau. Mesurons pour ce réseau l'efficacité temporelle, l'efficacité allocative et l'efficacité transactionnelle. Pour chacune des variables observées ( $NP$ ,  $DL$ , et  $\tau$ ) on propose la moyenne  $\mu$ , l'écart type  $\sigma$  et les valeurs maximale et minimales ( $Max$  et  $Min$ ).

TAB. 9 – Réseau  $k$ -régulier particulier avec  $k = 33$ 

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
$\mu$	4,31	18,649	6,525	2,054	0,388	50	18,649	6,525	2,054	0,388
$\sigma$	0,547	2,291	1,567	0,964	0,533	50	2,291	1,567	0,964	0,533
$Max$	6	30	13	6	2	50	30	13	6	2
$Min$	3	9	2	0	0	50	9	2	0	0

Les variables  $DL_i$  et  $\tau_i$  observées dans le cas de ces réseaux  $k$ -réguliers particuliers ne donnent pas des résultats significativement différents de ceux obtenus dans le cas des réseaux  $k$ -réguliers quelconques (Tableaux 1, 2 et 5). Cependant, ce constat n'est vrai qu'en moyenne. On est en mesure de souligner des comportements très différents selon que le voisinage est pair ou impair.

Dans le cas des voisinages pairs, les réseaux sont fortement centralisés autour des banques " proches " en terme de réseaux. Par construction en effet pour la banque  $i$ ,

les liens sont établis de manière symétrique de part et d'autre de  $i$  de manière à ce que  $i$  soit liée à ses  $k/2$  voisins à droite les plus proches et à sa gauche à ses  $k/2$  voisins les plus proches sur le cercle.

En revanche, si l'on se trouve dans le cas d'un réseau  $k$ -régulier avec  $k$  impair, la construction impose un lien avec chacun des  $(k-1)/2$  voisins les plus proches de  $(i)$  à sa droite et un lien avec chacun des  $(k-1)/2$  voisins les plus proches de  $(i)$  à sa gauche, le  $k-i$ ème lien uni la banque  $i$  à la banque  $j$  qui lui est diamétralement opposée sur le cercle. Ce lien supplémentaire permet de réduire la polarisation du réseau en permettant à chaque banque d'avoir accès à un "bassin de liquidité" plus lointain en terme de réseau et partant plus large en nombre de voisins. C'est en quelque sorte un "raccourci" (ou un pont) de réseau qui permet de réduire nettement les distances entre les banques parties prenantes. Ainsi pour un réseau  $k$ -régulier à 100 banques, on obtient les résultats suivants concernant l'efficacité distributive (pourcentage de succès de la décentralisation de l'allocation Pareto Optimale) pour les  $k$  impairs :

TAB. 10 – Pourcentage de décentralisation de l'allocation Pareto optimale  $\delta$  en fonction de  $k$  (impair)

$k$	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	$\geq 33$
$\delta$	2	5	14	27	42	54	64	72	80	87	93	100

TAB. 11 – pourcentage de décentralisation de l'allocation Pareto optimale  $\delta$  en fonction de  $k$  (pair)

$k$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$\delta$	0	1	2	3	6	10	17	25	35	46
$k$	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
$\delta$	55	62	71	77	81	86	90	94	97	100

On obtient donc un taux de succès croissant du nombre de liens, mais le taux de croissance est beaucoup plus rapide dans le cas des voisinages impairs que dans le cas des voisinages pairs.

Cet effet est lié à l'accès pour chaque banque à un sous ensemble de liquidité plus

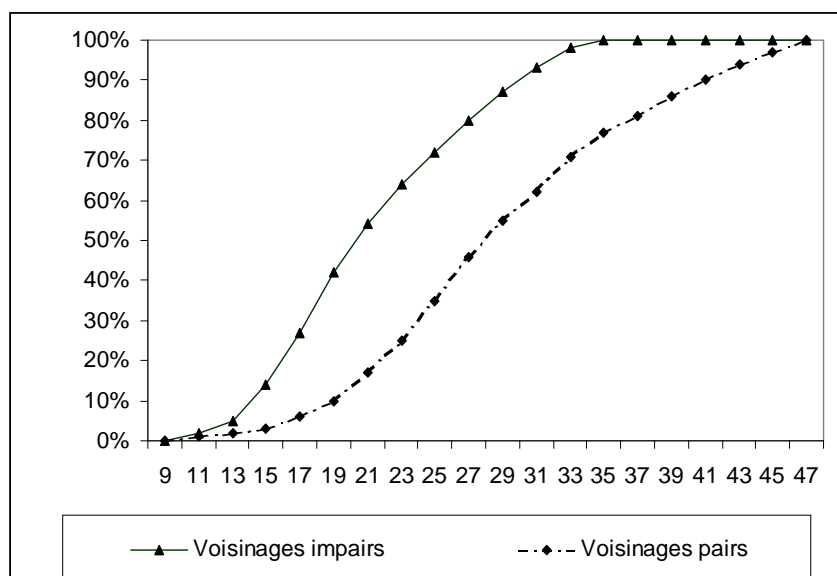


FIG. 3.7 – Evolution du taux de décentralisation de l'allocation optimale dans les réseaux k-réguliers particuliers

" vaste " en terme de partenaires dans le cas impair que dans le cas pair, car les réseaux à voisinages impairs sont moins polarisés que les réseaux à voisinage pair.

L'efficacité de la distribution de la liquidité entre les membres du réseaux est donc particulièrement dépendante de la structure du réseau en place. Ce mode de construction particulier du réseau nous montre, en effet, que les banques ont intérêt à disposer de liens avec des banques relativement lointaines sur le cercle. Elles ont ainsi accès à des " bassins " de liquidité distants les uns des autres. Ce faisant, elles ont un accès dans une distance courte à un bassin de liquidité qui pourrait être lointain sans ces " raccourcis " de réseaux. Elles trouvent ainsi de la liquidité avec plus de facilité.

## Conclusion

L'analyse par simulations nous permet de discriminer plus avant les réseaux entre eux en se fondant sur deux types d'indicateurs d'efficacité relative des réseaux. Il apparaît ainsi qu'au sein des réseaux décentralisant l'allocation Pareto optimale, les vi-

tesses de transactions, le nombre d'échanges et le rythme de décroissance du nombre de banques illiquides dépendent de l'architecture générale du réseau et de la taille des voisinages. Le réseau en étoile permet ainsi de minimiser le temps d'échange nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale. Dans les réseaux  $k$ -réguliers deux éléments sont essentiels pour comprendre la différence entre les réseaux : d'une part la structuration générale des liens qui détermine le degré de polarisation du réseau, et d'autre part la taille des voisinages. Les effets vont dans le même sens, la croissance de la taille des voisinages, ainsi que la polarisation plus forte viennent réduire l'efficacité allocative des réseaux. La topologie du réseau est donc un élément essentiel à prendre en compte pour cerner la gestion du risque de liquidité dans les banques. La question qui reste en suspens est celle de l'influence de cette topologie sur la transmission d'un évènement systémique ainsi que sur l'ampleur d'une crise. Ce point sera étudié dans le chapitre 4.

## 3.5 Annexes

### 3.5.1 Résultats obtenus pour des réseaux à 30 banques

TAB. 1 – Réseau en étoile

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
$\mu$	3,054	14	2,504	0,749	0,089	1E-04	7,936	14	2,504	0,749	0,089
$\sigma$	1,104	0	2,62	0,932	0,288	0,01	7	0	2,62	0,932	0,288
$Max$	6	14	9	4	2	1	15	14	9	4	2
$Min$	2	14	0	0	0	0	1	14	0	0	0

TAB. 2 – Réseau en étoile contraint

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
$\mu$	4,084	14	4,961	1,455	0,175	0	1	14	4,961	1,455	0,175
$\sigma$	0,504	0	1,173	0,784	0,386	0,01	0	0	1,173	0,784	0,386
$Max$	6	14	9	4	2	1	1	14	9	4	2
$Min$	3	14	1	0	0	0	1	14	1	0	0

TAB. 3 – Réseau complet

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
$\mu$	3,149	5,327	1,598	0,22	4E-04	0	15	5,327	1,598	0,22	4E-04
$\sigma$	0,511	1,208	0,817	0,425	0,02	0	0	1,208	0,817	0,425	0,02
$Max$	5	10	5	2	1	0	15	10	5	2	1
$Min$	2	1	0	0	0	0	15	1	0	0	0

TAB. 4 – Réseau  $k$ –régulier décentralisant l'allocation Pareto optimale à plus de

99%

# liens	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
11	3.12	5.14	1.56	0.2	0	15	5.14	1.55	0.2
12	3.13	5.17	1.56	0.21	0	15	5.17	1.5	0.21
13	3.13	5.19	1.57	0.21	0	15	5.19	1.57	0.21
14	3.14	5.21	1.57	0.21	0	15	5.21	1.57	0.21
15	3.14	5.23	1.58	0.21	0	15	5.23	1.58	0.21
16	3.14	5.24	1.58	0.21	0	15	5.24	1.58	0.21
17	3.14	5.25	1.59	0.21	0	15	5.25	1.59	0.21
18	3.15	5.27	1.59	0.22	0	15	5.27	1.59	0.22
19	3.14	5.27	1.59	0.22	0	15	5.27	1.59	0.22
20	3.14	5.28	1.59	0.22	0	15	5.28	1.59	0.22
21	3.15	5.29	1.59	0.22	0	15	5.29	1.59	0.22
22	3.15	5.29	1.6	0.22	0	15	5.29	1.6	0.22
23	3.15	5.3	1.6	0.22	0	15	5.3	1.6	0.22
24	3.15	5.31	1.6	0.22	0	15	5.31	1.6	0.22
25	3.15	5.31	1.6	0.22	0	15	5.31	1.6	0.22
26	3.15	5.32	1.6	0.22	0	15	5.32	1.6	0.22
27	3.15	5.32	1.6	0.22	0	15	5.32	1.6	0.22
28	3.15	5.33	1.61	0.22	0	15	5.33	1.61	0.22
29	3.15	5.33	1.61	0.22	0	15	5.33	1.61	0.22

TAB. 5 – Efficacité allocative moyenne

Taille du voisinage	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Efficacité Moyenne	2,30	2,313	2,323	2,33	2,34	2,343	2,35	2,36	2,36	2,363
Taille du voisinage		21	22	23	24	25	26	27	28	29
Efficacité Moyenne		2,367	2,37	2,373	2,377	2,377	2,380	2,380	2,387	2,387

TAB. 6 – Efficacité transactionnelle moyenne

Taille du voisinage	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Efficacité Moyenne	5,473	5,485	5,493	5,498	5,505	5,508	5,513	5,52	5,52	5,523
Taille du voisinage		21	22	23	24	25	26	27	28	29
Efficacité Moyenne		5,525	5,528	5,53	5,533	5,533	5,535	5,535	5,540	5,540

TAB. 7 – Réseau circulaire

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
$\mu$	1,531	6,328	2,7	10,56	0,728	0
$\sigma$	0,499	1,661	2,806	2,037	0,818	0
$Max$	2	13	11	15	5	0
$Min$	1	1	0	2	0	0

TAB. 8 – Réseaux  $k$ –réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale à moins de 99%

# liens	% de succès	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
1	0	1	7.25	0	0	0	7.75	0	0	0
2	0	1.57	5.46	2.47	0	0	11.7	0.81	0	0
3	0.03	2.26	4.95	2.36	0.49	0.01	13.58	3.15	0.31	0.01
4	0.26	2.6	4.85	1.72	0.47	0.02	14.41	4.27	0.73	0.05
5	0.56	2.81	4.87	1.53	0.35	0.01	14.77	4.69	1.04	0.1
6	0.76	2.95	4.92	1.5	0.27	0	14.92	4.88	1.26	0.14
7	0.88	3.03	4.98	1.51	0.23	0	14.97	4.97	1.4	0.17
8	0.94	3.08	5.04	1.52	0.21	0	14.99	5.03	1.47	0.18
9	0.98	3.1	5.08	1.54	0.2	0	15	5.08	1.52	0.19
10	0.99	3.12	5.12	1.55	0.2	0	15	5.12	1.54	0.2

TAB. 9 – Réseaux  $k$ –réguliers : tableau désagrégé des succès et échecs de décentralisation de l'allocation Pareto optimale

$\Omega$	$\Xi$	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
3	1	2.65	4.42	0.78	0.04	0	14.28	4.42	0.76	0.04
	0	2.24	4.97	2.41	0.5	0.02	13.55	3.11	0.29	0.01
4	1	2.93	4.81	1.2	0.12	0	14.49	4.78	1.17	0.12
	0	2.49	4.86	1.9	0.59	0.03	14.39	4.09	0.58	0.02
5	1	3.02	4.87	1.35	0.16	0	14.77	4.85	1.32	0.16
	0	2.54	4.87	1.75	0.58	.02	14.77	4.5	0.69	0.02
6	1	3.07	4.93	1.43	0.18	0	14.91	4.92	1.42	0.18
	0	2.55	4.91	1.71	0.57	0.02	14.92	4.75	0.76	0.02
7	1	3.1	4.99	1.48	0.19	0	14.97	4.98	1.48	0.19
	0	2.55	4.97	1.69	0.56	0.01	14.97	4.9	0.81	0.01
8	1	3.11	5.04	1.51	0.19	0	14.99	5.04	1.51	0.19
	0	2.56	5.03	1.69	0.56	0.01	14.99	5.01	0.85	0.01
9	1	3.12	5.08	1.53	0.2	0	15	5.08	1.53	0.2
	0	2.54	5.04	1.67	0.55	0.01	15	5.03	0.84	0.01
10	1	3.12	5.12	1.55	0.2	0	15	5.12	1.55	0.2
	0	2.55	5.09	1.66	0.55	0	15	5.08	0.87	0



### 3.5.2 Résultats complémentaires obtenus dans le cas du réseau à 100 banques

TAB. 10 – Réseaux  $k$ –réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale à 99%

au moins.

$\Omega$	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
22	4,29	17,85	6,25	1,96	0,35	50	17,85	1,96	0,35
25	4,30	17,90	6,27	1,97	0,35	50	17,90	6,27	1,97
30	4,30	17,98	6,29	1,98	0,35	50	17,98	6,29	1,98
35	4,30	18,03	6,31	1,98	0,36	50	18,03	6,31	1,98
40	4,30	18,07	6,33	1,99	0,36	50	18,07	6,33	1,99
45	4,30	18,09	6,33	1,99	0,36	50	18,09	6,33	1,99
50	4,31	18,11	6,34	2	0,36	50	18,11	6,34	2
55	4,31	18,13	6,35	2	0,36	50	18,13	6,35	2
60	4,31	18,15	6,36	2	0,36	50	18,15	6,36	2
65	4,31	18,16	6,35	2	0,36	50	18,16	6,35	2
70	4,31	18,17	6,36	2	0,36	50	18,17	6,36	2
75	4,31	18,18	6,36	2	0,36	50	18,18	6,36	2
80	4,31	18,19	6,36	2,01	0,37	50	18,19	2,01	0,36
85	4,31	18,20	6,37	2	0,36	50	18,20	2	0,36
90	4,31	18,19	6,37	2,01	0,37	50	18,19	2,01	0,36
95	4,31	18,19	6,37	2,01	0,36	50	18,19	2,01	0,36
99	4,31	18,21	6,37	2,01	0,36	50	18,21	2,01	0,36

TAB. 11 – Réseau  $k$ –régulier décentralisant l'allocation Pareto optimale à moins de 99%

$\Omega$	$\Xi$	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
1	0	1	24.75	0	0	0	0	25.25	0	0	0
2	0	1.94	19.13	15.45	0	0	0	37.94	2.64	0	0
3	0	2.71	17.39	9.38	5.43	0.33	0	44.21	10.37	1.05	0.04
4	0	3.14	16.86	6.78	4.21	0.76	0.02	47.25	14.43	2.52	0.22
5	0,02	3.38	16.77	6.01	2.99	0.86	0.03	48.71	16.04	3.68	0.47
6	0,08	3.57	16.85	5.85	2.41	0.82	0.04	49.4	16.66	4.55	0.73
7	0,19	3.72	16.96	5.88	2.14	0.72	0.04	49.73	16.92	5.17	0.98
8	0,34	3.84	17.09	5.94	2	0.62	0.04	49.88	17.09	5.57	1.21
9	0,48	3.94	17.22	6	1.94	0.54	0.03	49.95	17.22	5.83	1.4
10	0,61	4.02	17.32	6.05	1.92	0.48	0.02	49.98	17.32	5.97	1.55
11	0.71	4.09	17.4	6.09	1.91	0.43	0.02	49.99	17.4	6.05	1.66
12	0.79	4.14	17.49	6.13	1.92	0.41	0.01	50	17.49	6.11	1.75
13	0.85	4.18	17.55	6.15	1.92	0.39	0.01	50	17.55	6.14	1.81
14	0.89	4.21	17.6	6.17	1.93	0.37	0.01	50	17.6	6.16	1.85
15	0.92	4.24	17.65	6.19	1.94	0.36	0.01	50	17.65	6.19	1.88
16	0.95	4.25	17.69	6.2	1.94	0.36	0	50	17.69	6.2	1.91
17	0.96	4.26	17.73	6.22	1.95	0.35	0	50	17.73	6.22	1.92
18	0.98	4.27	17.76	6.22	1.95	0.35	0	50	17.76	6.22	1.93
19	0.98	4.28	17.78	6.23	1.95	0.35	0	50	17.78	6.23	1.94
20	0.99	4.29	17.81	6.24	1.96	0.35	0	50	17.81	6.24	1.95
21	0.99	4.29	17.84	6.25	1.96	0.35	0	50	17.84	6.25	1.96

### 3.5.3 Résultats obtenus pour des réseaux à 500 banques

TAB. 12a – Réseau en étoile

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$DL_6$	$DL_7$
$\mu$	4,47	249	46,266	16,791	6,036	2,026	0,569	0,052
$\sigma$	2,476	0	45,904	16,792	6,163	2,198	0,795	0,224
$Max$	8	249	108	44	20	8	4	2
$Min$	2	249	0	0	0	0	0	0

TAB. 12b – Réseau en étoile

	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	$\tau_6$	$\tau_7$
$\mu$	249	46,266	16,791	6,036	2,026	0,569	0,052
$\sigma$	45,904	0	16,792	6,163	2,198	0,795	0,224
$Max$	249	108	44	20	8	4	2
$Min$	249	0	0	0	0	0	0

TAB. 13 – Réseau en étoile contraint

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$DL_6$	$DL_7$
$\mu$	6,90	249	91,82	33,29	11,90	4,05	1,14	0,1
$\sigma$	0,53	0	4,94	3,47	2,18	1,34	0,78	0,30
$Max$	8	249	111	46	20	10	5	2
$Min$	5	249	74	21	5	0	0	0

TAB. 14 – Réseau complet

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$DL_6$	$DL_7$
$\mu$	5,90	91,82	33,45	11,94	4,06	1,13	0,1	0,0
$\sigma$	0,53	4,95	3,48	2,2	1,34	0,77	0,30	0,01
$Max$	8	112	47	21	10	5	2	1
$Min$	4	75	21	5	0	0	0	0

TAB. 15 – Réseaux  $k$ –régulier avec effet de bassin de liquidité

Notons que dans le cas du réseau à 500 banques, les simulations pour les réseaux  $k$ –réguliers quelconques n’ont pas été menées pour des raisons techniques. La taille des matrices en jeu n’est pas gérable par Gauss sur du matériel de bureau de capacités standard.

TAB. 15a – Voisinage  $k = 250$ 

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$DL_6$	$DL_7$
$\mu$	5,92	92,18	33,66	12,05	4,13	1,17	0,12	0
$\sigma$	0,549	5,009	3,55	2,29	1,355	0,799	0,322	0,224
$Max$	7	108	47	19	9	5	2	2
$Min$	4	78	23	5	0	0	0	0

TAB. 15b – Voisinage  $k = 370$ 

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$DL_6$	$DL_7$
$\mu$	5,87	91,47	33,32	11,92	4,04	1,12	0,09	0
$\sigma$	0,538	4,934	3,46	2,17	1,322	0,799	0,293	0
$Max$	7	106	44	20	9	5	2	0
$Min$	5	74	23	5	1	0	0	0

TAB. 15c – Voisinage  $k = 450$ 

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$DL_3$	$DL_4$	$DL_5$	$DL_6$	$DL_7$
$\mu$	5,92	91,9	33,55	12,01	4,11	1,17	0,10	0
$\sigma$	0,524	4,95	3,60	2,21	1,356	0,783	0,305	0
$Max$	7	109	46	19	9	4	2	0
$Min$	5	76	21	4	1	0	0	0

TAB. 16 – Réseau circulaire

	$NP$	$DL_1$	$DL_2$	$\tau_1$	$\tau_2$
$\mu$	2	102,22	90	181,79	12,65
$\sigma$	0	7,08	7,57	8,93	3,38
$Max$	2	132	122	210	28
$Min$	2	78	67	138	1



## Chapitre 4

### Contagion, crise et structure de réseau

## Introduction

Un système bancaire ne fait face à des faillites en chaîne qu'à la condition de réunir deux éléments clé : il faut que le système subisse un choc localisé ou généralisé, et que ce choc soit en mesure de se propager. Si la théorie économique a largement exploré la nature des chocs possibles et leurs conséquences, on doit remarquer que l'on est toujours à la recherche d'un cadre d'analyse pertinent en ce qui concerne le canal de propagation. Or, les banques sont de plus en plus fréquemment impliquées dans des systèmes de paiements en réseau comme les systèmes de règlement - livraison de titres ou les systèmes de compensation interbancaire. Ces systèmes fonctionnent comme des réseaux décentralisés d'échanges de fonds, il s'agit par exemple de CHIPS et Fedwire aux Etats-Unis, GSIT en France, ou TARGET<sup>1</sup> dans l'Union Européenne. L'histoire financière est émaillée d'événements systémiques dans lesquels les difficultés localisées d'un établissement se sont étendues vers différents intervenants en raison des liens les unissant. Les exemples les plus célèbres en ce sens sont sans doute la faillite de la Herstatt Bank en 1974, la crise de liquidité de la Bank of New York en 1985, la crise des banques scandinaves en 1992<sup>2</sup>, ou encore la faillite retentissante de LTCM en 1994... Tous ces événements ont mis en péril le fonctionnement des systèmes interbancaires au point d'imposer des interventions diverses des autorités monétaires. Un système entier de règlement a même fait faillite en 1982 au Koweït lors de la disparition du marché d'Al-Manakh : la compensation de 29 000 ordres de paiements postdatés de négociateurs de marché était devenue impossible en raison de la chute de 45% du marché boursier.

Au coeur de ces événements se trouve l'effet de domino, dans le sens où la faillite d'un intervenant a, ou aurait pu conduire au travers de la cascade de paiements les liant

---

<sup>1</sup>Trans-european Automated Real-time Gross settlement Express Transfer system, TARGET est le système de paiement de gros dans la zone euro (RGTS) utilisé pour les transferts interbancaires en temps réel.

<sup>2</sup>Dans le cas de la crise scandinave, les difficultés de deux banques hypothécaires ont entraîné celles de tout le système bancaire.

à la faillite d'un grand nombre d'autres. Or, tout comme dans l'effet de domino, l'effet des cascades de paiements dépend clairement de la façon dont les dominos sont disposés les uns par rapport aux autres, autrement dit de la topologie, ou de l'architecture du réseau de paiements.

En ce sens l'architecture des liens interbancaires est essentielle pour comprendre la nature du risque systémique, ainsi que pour en mesurer la portée. L'objet de ce chapitre est donc de lier la topologie des liens interbancaires, le risque systémique, et la gestion du risque de faillite au sein d'un réseau de dettes interbancaires. On cherche, en particulier, à s'interroger sur la façon dont l'architecture des réseaux interbancaires influence la stabilité des systèmes financiers face à un événement systémique : quelles sont les conséquences de la structure des liens tant sur la contagion, entendue au sens de propagation d'un événement systémique localisé, que sur la crise, dont l'indicateur-clé est le nombre de banques conduites à la faillite ?

Nos résultats montrent que la topologie des réseaux interbancaires est non neutre sur le risque systémique. En particulier, il apparaît que l'ampleur de la contagion, tout comme celle de la crise, sont des fonctions croissantes de la connectivité du réseau. En outre, plus les voisinages, c'est-à-dire le nombre de banques partenaires, est grand, plus la crise, mesurée par le nombre d'institutions en faillite, est forte. En revanche, la longueur des chemins liant les intervenants apparaît, au même titre que la valeur des réserves liquides, ou la valeur de liquidation des actifs, comme un facteur réducteur de l'ampleur d'une crise.

Le plan de ce chapitre s'organise comme suit. Dans une première section nous présentons le cadre d'analyse du modèle de contagion, la seconde section analyse les liens entre la structure du réseau et la contagion. La troisième section étudie la contagion et la crise dans un réseau à 6 banques, alors que la quatrième section généralise ces résultats.



## 4.1 Structure de réseau et contagion

### 4.1.1 Cadre d'analyse

#### Technologies et investissements

Le cadre général est celui d'un modèle à la Diamond et Dybvig (1983) : il n'y a aucune différence pour ce qui est des supports d'investissement et de la nature des préférences des agents. Les modifications apportées sont les suivantes. L'économie est constituée de  $n$  régions ex-ante identiques ( $n$  est un entier naturel strictement positif). On note  $V_n = \{i_1, i_2 \dots i_n\}$  l'ensemble de ces régions. Il existe dans chaque région un niveau distinct d'investissement qui garantit un rendement maximal par unité investie. En outre, comme chez Diamond (1984) ou Lagunoff et Schreft (2001), la technologie de long terme nécessite un niveau minimal d'investissement<sup>3</sup>. Ainsi, dans la région  $i$ , pour un investissement de  $k^i$  unités, le rendement par unité investie en  $t = 0$  de l'actif de long terme est donné par la fonction suivante :

$$R(k^i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k^i < k_{\inf}^i \\ R^* \exp \left[ -\frac{1}{2} (k^i - k_i^*)^2 \right] & \text{si } k^i \geq k_{\inf}^i \end{cases}$$

où  $k_{\inf}^i$  est le seuil d'investissement en-deça duquel le rendement est nul.  $k_i^*$  est le niveau d'investissement qui garantit un rendement maximal par unité investie, avec  $k_i^* > k_{\inf}^i$ . Notons que seul le niveau de capital à investir pour maximiser le rendement est variable selon les régions, si l'investissement atteint ce niveau, le rendement est fixé à  $R^*$  quelle que soit la région. Cette modélisation ad hoc de la technologie de long terme est la raison d'existence du marché interbancaire. Notons que l'objet de ce chapitre n'est pas d'obtenir un modèle justifiant l'émergence du réseau interbancaire, mais bien d'étudier les conséquences de la structure de ce réseau sur le risque systémique. C'est pour cette raison que nous faisons, ce choix de modélisation.

Les banques sont ici soumises à une double contrainte. La première, comme dans tout modèle à la Diamond et Dybvig (1983), porte sur le niveau de liquidité disponible

---

<sup>3</sup>Ce type de discontinuité est standard dans les modèles d'intermédiation.

en  $t = 1$ . Les banques doivent être en mesure de servir les retraits des déposants précoces, ce qui leur impose un certain montant minimal de réserves liquides. La seconde porte sur la technologie. La banque de la région  $i$  peut ne pas disposer d'assez de dépôts en propre pour atteindre le niveau d'investissement qui maximise le rendement par unité investie  $k_i^*$ . Néanmoins, on postule le fait que la somme des dépôts collectés dans toutes les régions est suffisante pour desserrer ces deux contraintes au niveau agrégé. Le total des dépôts permet non seulement de couvrir les besoins de liquidité à court terme des déposants précoces, mais aussi de saturer le niveau d'investissement dans chaque région. Ainsi, sous réserve d'une technologie permettant la redistribution des fonds disponibles, il est possible d'atteindre dans chaque région le niveau d'investissement qui lui garantit un niveau maximal de rendement par unité investie.

Pour ce faire il est indispensable d'envisager la présence d'une technologie permettant l'échange de fonds entre les banques. Cette technologie est fournie par un réseau interbancaire par lequel les banques sont en mesure en  $t = 0$  de s'échanger de la dette de long terme. Ce réseau permet par hypothèse d'atteindre dans chaque région le niveau d'investissement qui maximise le rendement par unité investie. Ce réseau est sans coût.

Les caractéristiques de la dette sont les suivantes : une unité de dette émise en  $t = 0$  arrive à échéance en  $t = 2$ , elle porte le taux d'intérêt  $\rho$ . On fait l'hypothèse que le contrat de dette prévoit une option de remboursement anticipé à la demande du créateur en  $t = 1$ . Si le créateur exerce cette option, le débiteur est contraint de le rembourser en  $t = 1$  avant l'arrivée à échéance de la dette telle que prévue initialement au contrat (en  $t = 2$ ). Cependant, en ce cas, le créateur est contraint d'abandonner le montant des intérêts capitalisés au cours de la première période, et ne recouvre au maximum que le montant nominal prêté. La perte des intérêts correspond donc à une pénalité liée à la demande de remboursement anticipé.

### L'enchaînement des événements dans le modèle

En  $t = 0$ , les banques collectent les dépôts, le réseau de dette est imposé de manière à permettre à toutes les banques de disposer d'un total de passif suffisant pour maximiser le rendement par unité investie dans l'actif long. Les banques réalisent leurs investissements dans l'actif liquide et dans l'actif long.

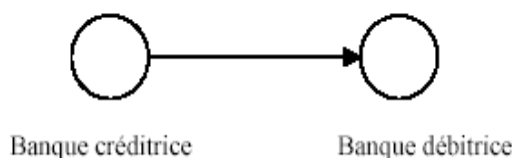
En  $t = 1$ , les banques connaissent le niveau de demande de liquidité qui va leur être adressé. En cas de demande de remboursement anticipé, les opérations interbancaires ont lieu. En l'absence d'un tel événement, il n'y a pas de flux interbancaires lors de cette période. Les déposants précoces retirent leurs fonds.

En  $t = 2$ , la dette interbancaire est remboursée, enfin les déposants tardifs retirent leurs fonds.

Il est nécessaire de décrire plus précisément le réseau interbancaire, pour cerner les enjeux qu'il pose en terme de risque systémique.

### Le réseau interbancaire

En signant des contrats de prêts interbancaires, les banques s'insèrent donc dans un réseau de dettes dont elles sont les sommets. Ce réseau relie banques débitrices et créditrices par des arcs dirigés, et il est donc pleinement décrit sous la forme d'un graphe dirigé retraçant toutes les relations de dettes liant les banques, comme le présente la figure suivante dans le cas le plus simple d'un réseau dirigé à deux banques.



La valeur du taux d'intérêt se place sur la frontière de transformation des maturités, on a  $R^* = (1 + \rho)$ , ce qui garantit un niveau de consommation équivalent pour les

consommateurs quelle que soit leur région d'origine<sup>4</sup>. Comme chez Freixas et alii (2000), on ne prendra pas en compte les possibilités d'actions stratégiques des déposants<sup>5</sup>.

Le réseau de dettes interbancaires permet donc, par hypothèse, de saturer les opportunités d'investissement, en garantissant un niveau d'investissement qui maximise le rendement par unité investie dans chaque région. Il permet d'améliorer le bien être des déposants. Cette capacité du réseau à satisfaire toutes les opportunités d'investissement est également une caractéristique partagée par la contribution de Lagunoff et Schreft (2001).

En intégrant le réseau interbancaire les banques renforcent leur instabilité potentielle. En effet, les banques financent des emplois stables avec des ressources instables ou potentiellement instables. Ces ressources sont de deux origines : d'une part, il s'agit de dépôts bancaires par nature courts et instables - ce qui expose les banques au risque de course comme l'ont montré Diamond et Dybvig (1983) - , d'autre part, il s'agit de dette interbancaire qui est dotée d'une option de remboursement anticipée à la période intermédiaire. Si cette option est exercée, une banque peut aisément se retrouver illiquide, incapable qu'elle est de faire face au remboursement demandé de sa dette, puis au paiement des déposants courts avec ses seules réserves. Pour pallier cette situation, elle est contrainte de liquider ses propres actifs interbancaires, déclenchant une réaction en chaîne le long des liens de créances (cf section 4.1.4).

On cherche ici à déterminer l'influence du réseau sur la contagion et la crise face à un événement non prévu. Il ne s'agit pas d'étudier la structuration du réseau de manière à ce qu'il permette de freiner une contagion systémique par son architecture ex-ante. En conséquence, comme c'est le cas chez Allen et Gale (2000), on considérera donc que le risque d'occurrence d'un événement systémique (au sens défini dans l'introduction

---

<sup>4</sup>On peut montrer, en effet, que ce niveau de taux d'intérêt est le seul compatible avec un niveau de consommation identique au sein d'une même classe d'agents (précoces ou tardifs) quelle que soit la situation (prêteuse ou emprunteuse) de la banque de leur région d'origine. Il s'agit en réalité d'une condition de non arbitrage entre les régions pour les déposants.

<sup>5</sup>Néanmoins, une extension directe de ce chapitre en intégrant les comportements des déposants est en cours.

générale) n'est pas pris en compte ex-ante dans le programme de maximisation des banques.

Le réseau tel que postulé permet d'atteindre, dans chaque région, le niveau d'investissement pour lequel le rendement de l'actif long est maximal en  $t = 2$ . Sa structure est quelconque, à une restriction près : il ne comporte qu'une composante<sup>6</sup>. De plus, toute banque peut être à la fois émettrice et réceptrice de dettes : toute banque peut donc disposer d'un ou de plusieurs actifs interbancaires tout en étant elle-même endettée vis à vis d'une ou de plusieurs autres banques du réseau. Ceci signifie que le graphe n'est pas biparti. Si on considère un réseau à trois banques, on peut donc faire face à la situation proposée à la figure suivante :

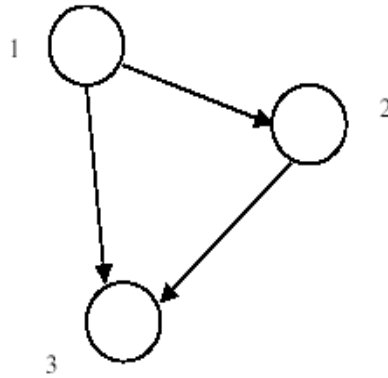


FIG. 4.1 – Réseau de dettes à 3 banques

Dans ce réseau, la banque 1 est exclusivement créditrice, la banque 3 exclusivement débitrice, alors que la banque 2 est à la fois créditrice et débitrice.

Nous noterons  $L$  la matrice des passifs nominaux, où  $L_{ij}$  représente la dette nominale de la banque  $i$  envers la banque  $j$ . Tous les éléments de  $L$  sont non négatifs :  $L_{ij} \geq 0 \forall i, j \in V_n$ , et les éléments diagonaux sont nuls :  $L_{ii} = 0 \forall i$  (une banque ne

<sup>6</sup>En terme de graphes ceci signifie simplement que la distance entre tout couple de banques est finie. Considérer des réseaux à plusieurs composantes viendrait restreindre notre analyse dans la mesure où par définition la contagion telle que proposée ici ne peut se propager entre deux composantes distinctes.

peut être son propre créancier ou son propre débiteur). Notons que, contrairement à une matrice d'adjacence, la matrice  $L$  n'est pas symétrique.

Soit  $\bar{p}_i$  le total, en termes nominaux, de la dette de la banque  $i$  envers l'ensemble de ses créanciers à la fin de la période  $t = 0$ .  $\bar{p}_i$  est le total emprunté par la banque  $i$  en  $t = 0$ , dès lors

$$\bar{p}_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} \quad (4.1)$$

$\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$  est le vecteur associé que l'on appellera le vecteur des obligations nominales. Ce vecteur décrit le montant du principal emprunté par chaque banque après des autres banques du réseau en  $t = 0$ . Ce vecteur n'est pas un vecteur des situations nettes mais un vecteur du montant total brut de la dette de chacune des banques envers le réseau. Ainsi dans le cas présenté à la figure (4.1), et dans le cas où la valeur de chacune des dettes bilatérales<sup>7</sup> est égale à 1, on a  $\bar{p} = (0, 1, 2)$ .

On considérera ici le cas le plus simple dans lequel la valeur nominale des prêts bilatéraux est normée égale à  $l$  avec par hypothèse  $l > b$ . La matrice  $L$  peut donc être écrite sous la forme du produit du scalaire  $l$  avec la matrice  $M$  où  $M$  est la matrice décrivant l'existence de liens de passifs. On a  $M_{ij} = 1$  si la banque  $i$  est endettée envers la banque  $j$ ,  $M_{ij} = 0$  sinon. En d'autres termes,

$$L = lM \quad (4.2)$$

avec

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } L_{ij} = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

A la période  $t = 1$ , si une banque fait face à une ou plusieurs demandes de remboursements anticipés sur ses passifs interbancaires, elle est contrainte de procéder à des liquidations d'actifs afin d'y faire face. En effet, du fait de la structure du réseau,

---

<sup>7</sup>ou valeur des arcs.

il n'existe pas de fonds prêtables sur le marché interbancaire en  $t = 1$ . La liquidation des actifs suit un ordre précis.

### 4.1.2 Ordre de liquidation des actifs et comportement des banques à la période $t = 1$

En  $t = 1$ , une banque peut se trouver dans trois situations différentes : elle est solvable si elle peut faire face à la demande de liquidité qui lui est adressée en n'utilisant que ses actifs court terme en réserve ; elle est illiquide si elle doit pour ce faire liquider une partie de ses actifs longs (interbancaires ou productifs) ; elle est insolvable, (et en faillite) si la liquidation des actifs ne permet pas de faire face à la demande de paiement qui lui est adressée à cette date.

La liquidation des actifs en portefeuille pour chaque banque en  $t = 1$  suit un ordre précis : d'abord la vente des actifs courts, ensuite, la liquidation des actifs interbancaires et enfin, la liquidation des actifs longs.

En effet, la liquidation des différents actifs pour obtenir des fonds de liquidité courante supporte un coût mesuré par le coût relatif de la consommation à la date  $t = 1$  en terme de consommation à la date  $t = 2$ . Le coût le plus faible est celui de la liquidation des actifs courts dans la mesure où une unité de consommation ré-investie dans l'actif court en  $t = 1$  produit une unité en  $t = 2$ .

En liquidant une part de ses actifs interbancaires, la banque abandonne  $R^* > 1$  unités de consommation future pour obtenir une unité en  $t = 1$ . En liquidant une unité d'actif long terme, la banque abandonne  $R^*$  unités futures pour  $r < 1$  unités présentes. Le coût relatif de cette liquidation est donc  $\frac{R}{r}$ . L'ordre de liquidation des actifs est donc bien celui annoncé, les coûts de liquidation étant dans l'ordre :

$$1 < R^* < \frac{R}{r} \quad (4.4)$$

Cette liquidation d'actifs permet à la banque qui la réalise de faire face à tout ou partie des passifs qui sont exigés en  $t = 1$ . Evaluons la valeur des paiements réalisés.

### 4.1.3 Valeur des paiements interbancaires en $t = 1$

Dans le cadre de notre modèle, on est confronté à deux situations. Si aucune banque ne fait face à un événement systémique, ce qui est le cas général, il n'y a aucun échange de fonds entre les banques lors de la période intermédiaire. Les flux interbancaires sont nuls, les seuls flux financiers sont ceux des déposants précoces qui retirent en fin de période  $t = 1$ . Si une banque fait face à un événement systémique, comme une demande de liquidité intermédiaire de la part des déposants plus forte que prévue, ou la faillite d'un créancier, des flux interbancaires positifs se réalisent à la période  $t = 1$ . Pour mesurer ces paiements nous introduisons plusieurs notations.

Soit  $\Pi_{ij}$  le passif relatif de la banque  $i$  envers la banque  $j$  par rapport au total des passifs de la banque  $i$ .

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{L_{ij}}{\bar{p}_i} & \text{si } \bar{p}_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice correspondante,  $\Pi$ , retrace l'ensemble des passifs relatifs. Cette matrice permet de connaître les passifs bilatéraux nominaux des banques en pourcentage du total des passifs individuels.

On notera  $p_i$  le paiement total réalisé par la banque  $i$  à l'ensemble des autres banques dans le réseau à la période  $t = 1$ .  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  représente le vecteur des paiements totaux réalisés par les banques du réseau lors de cette période.

Aucune banque ne bénéficie sur la dette d'une priorité de paiement, ce qui implique que le total des remboursements reçus par la banque  $i$  est égal à  $\sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j$ , où  $\Pi^T$  est la transposée de  $\Pi$ .

Si à la période intermédiaire la banque est liquidée, la valeur totale de ses actifs est partagée entre ses créanciers bancaires. En ce cas, les déposants sont lésés. On considère la situation dans laquelle ces derniers n'adoptent pas de comportements stratégiques anticipant la faillite de la banque et se ruant au guichet pour en retirer leurs dépôts. Pour justifier cette hypothèse, on pourra considérer un cas dans lequel les déposants sont totalement couverts par une garantie publique sur les dépôts dont la charge fis-



cale repose sur une autre catégorie d'agents non considérée dans le modèle. On peut alternativement considérer que la réaction des marchés interbancaires par échanges électroniques est toujours antérieure à celle des déposants qui doivent se rendre au guichet. En se rapprochant d'une hypothèse faite par Freixas et alii (2000) on peut également considérer que la proportion de déposants courts est suffisamment faible pour ne pas être prise en compte.

**Définition 1** *Une banque est en faillite quand le paiement de ses passifs exigés à la période intermédiaire l'oblige à liquider ses réserves, ses actifs interbancaires et ses actifs productifs. On entend donc par faillite la disparition d'un établissement bancaire, ou en terme de graphes, la disparition d'un sommet dans le réseau.*

La faillite correspond donc au cas où la banque est insolvable. La valeur complète de ses actifs ne permet pas de couvrir le montant des paiements auxquels elle doit faire face en  $t = 1$ .

On fait l'hypothèse suivante : au début de la période  $t = 1$ , le réseau fait face à un événement systémique non anticipé. Une banque est en faillite. Cette faillite initiale a lieu pour des raisons non modélisées ici. Cette faillite se manifeste de la façon suivante : la banque en faillite initiale, disons la banque  $i$ , liquide par anticipation l'intégralité de ses actifs courts et longs. Sur le marché interbancaire elle fait jouer l'option de remboursement anticipé. En revanche, la banque  $i$  fait défaut sur sa dette interbancaire et ne verse rien à ses créanciers. Cette faillite initiale, dite " de premier ordre ", initie un processus de contagion des remboursements anticipés au long du réseau.

#### 4.1.4 Contagion par les actifs et crise bancaire à court terme

La présence du réseau a deux conséquences claires : l'une sur la propagation de l'événement systémique localisé le long des liens ; l'autre sur la valeur des paiements interbancaires. Ces deux questions nous conduisent à distinguer clairement la contagion de la crise au long de ce chapitre.

La contagion renvoie à la première thématique, celle de la propagation des demandes de remboursements anticipés au long du réseau. Elle décrit la diffusion de l'illiquidité dans le réseau. La propagation provient de l'illiquidité des banques à la période intermédiaire : en l'absence de fonds disponibles, les banques sont contraintes de liquider leurs actifs pour faire face à leurs obligations interbancaires.

La crise renvoie à la deuxième thématique, celle des paiements interbancaires qui ont lieu une fois la propagation achevée et qui déterminent au final le nombre de banques en faillite.

### **La contagion : une extension progressive de l'illiquidité dans le système**

Pour ce qui est de la contagion, l'événement systémique initie un cycle de demandes de remboursements anticipés dans le système qui va se propager au long du réseau. Du fait de l'ordre de liquidation des actifs, en effet, la demande de remboursement anticipé de la banque  $i$  sur ses débiteurs  $j$  est répercutée par cette dernière sur ses propres débiteurs. Les banques  $j$  se trouvent alors dans une situation d'illiquidité. Elle cherchent à y faire face en liquidant elles-mêmes leurs actifs interbancaires dans le cas où leurs réserves liquides disponibles ne sont pas suffisantes. Cet enchaînement décrit la contagion dans le système comme une extension progressive de l'illiquidité. En termes de graphes, du fait de l'ordre de liquidation des actifs, cette propagation suit le chemin des arcs sortants, on peut dire que c'est une propagation à court terme du côté des actifs.

La contagion évolue donc au sein du réseau interbancaire selon les lignes suivantes :

$X$ , vecteur de dimension  $n$ , décrit la situation initiale du système interbancaire en regard de l'événement systémique. Tous les éléments du vecteur  $X$  sont nuls à l'exception de l'élément correspondant à la banque ayant subi l'événement systémique initial, par convention la banque  $i$ . On a donc  $X_i = 1$ .

Les banques appliquent une stratégie " tout ou rien " en liquidant l'intégralité de leurs actifs interbancaires quand elles font face à une demande de remboursement

anticipé. La banque  $i$  demande le remboursement anticipé de ses créances interbancaires. La transmission des demandes de remboursement anticipé de la banque touchée par l'événement systémique vers ses débiteurs est pleinement retracée par le produit  $MX = X^{(1)}$ . Ce vecteur  $X^{(1)}$  est appelé le " vecteur de contagion de premier ordre ".  $X_j^{(1)}$  donne la valeur des passifs exigés par la banque  $i$  sur la banque  $j$ . Dès lors,  $X_j^{(1)} = 0$  signifie que la banque  $j$  ne fait face à aucune demande de remboursement anticipé, alors que  $X_j^{(1)} = 1$  implique que la banque  $j$  doit faire face au remboursement anticipé de  $l$  envers sa créancière en faillite initiale ( $l$  est la valeur nominale des prêts). Lors de cette première étape, seule la banque  $i$  touchée par l'événement systémique initial réclame un remboursement anticipé de ses créances interbancaires. A l'issue de cette étape, l'ensemble des banques débitrices de la banque  $i$  se retrouvent illiquides. La situation de liquidité de l'ensemble des banques du réseau peut être retracée au travers d'un vecteur synthétique  $Z^{(1)}$ , dont les  $n$  éléments sont obtenus comme suit :

$$Z_i^{(1)} = X_i + (1 - X_i)X_i^{(1)} \quad (4.5)$$

$Z^{(1)}$  est un vecteur d'état décrivant la situation de toutes les banques du réseaux à l'issue de la contagion de premier ordre. Quand  $Z_i^{(1)} = 0$ , la banque  $i$  n'a pas été touchée par la contagion. Quand le vecteur  $Z^{(1)}$  est égal au vecteur unitaire ( $Z^{(1)} = (1)$ ), on sait que le processus de contagion a été complet : toutes les banques sont " infectées ".

Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand  $Z_i^{(1)} \neq (1)$ , le processus de contagion se poursuit. En  $t = 1$ , pour chaque banque, les seules liquidités disponibles sont les investissements dans les actifs courts. Par hypothèse, ce montant est inférieur à la valeur nominale d'une unité de dette. En conséquence, les banques  $j$  touchées par la contagion de premier ordre sont illiquides et sont donc contraintes à leur tour de se retourner vers le marché interbancaire pour liquider leurs créances afin de faire face à leurs passifs exigés.

Cette transmission de l'illiquidité des banques  $j$  vers leurs débiteurs est appelée

" contagion de second ordre ". Elle est décrite dans le graphe par le produit  $MZ^{(1)}$ . Celui-ci donne le vecteur de contagion de second ordre noté  $X^{(2)}$ , c'est-à-dire les banques qui sont touchées par une demande de remboursement anticipé sans être directement liées à la banque en faillite initiale.  $X_j^{(2)} = 0$  indique que la banque  $j$  n'est confrontée à aucune demande de remboursement anticipé, et  $X_j^{(2)} = 1$  indique que la banque  $j$  doit faire face à la demande de remboursement anticipé  $l$  auprès de ses banques créancières. Le vecteur  $Z^{(2)}$  décrit l'ensemble des positions des banques dans le réseau en regard de la contagion, c'est-à-dire la situation de l'ensemble des banques affectées ou non par la contagion de premier, et, de second ordre. Ses  $n$  éléments sont donnés par

$$Z_i^{(2)} = Z_i^{(1)} + (1 - Z_i^{(1)})X_i^{(2)} \quad (4.6)$$

On peut généraliser, les termes utilisés dans les deux premières étapes de contagion en posant la définition suivante :

**Définition 2** *L'ordre de contagion est défini par la transmission en cascade des demandes de remboursements anticipés au long du réseau.  $X^{(k)}$  donne l'ensemble des banques atteintes par ces demandes à l'ordre  $k$ .*

*$Z^{(k)}$  donne l'ensemble des banques illiquides après les  $k$  premiers ordres de contagion.*

La procédure décrite aux deux premiers ordres est répétée au plus  $n$  fois, jusqu'à ce que l'on touche la condition de fin donnée par

$$Z^{(k+1)} = Z^{(k)} \quad (4.7)$$

En ce cas en effet les banques illiquides après l'itération  $(k + 1)$  sont les mêmes que les banques illiquides après l'itération  $k$ . Aucune banque illiquide supplémentaire n'apparaît lors de la  $(k + 1)^{ième}$  itération de la procédure. La propagation se termine à l'ordre  $k$ . On dit que l'on a atteint un ordre de contagion stable.

**Définition 3** *Le niveau de contagion stable est atteint lorsque le vecteur d'état décrivant les banques touchées par le phénomène de contagion est stable i.e. quand on a  $Z^{(k+1)} = Z^{(k)}$*

De plus, toutes les banques sont touchées à l'ordre  $k$  quand  $Z^{(k)} = (1)$ . A l'ordre  $k + 1$ , les paiements se réalisent.

Par conséquent, on obtient avec ce système une description complète de la façon dont les demandes de remboursement se répercutent en cascade au long du réseau. Par itérations successives des opérations, il est possible de décrire complètement l'extension de l'illiquidité le long des chaînes de créances du réseau.

Ce système d'itérations nous permet d'embrasser complètement les aspects relatifs à la propagation et de comprendre la capacité d'une certaine topologie à transmettre et éventuellement à amplifier l'événement systémique initial. Ce système fait émerger deux moyens sur lesquels on pourra s'appuyer pour mesurer la propagation de l'illiquidité dans le réseau : l'un relatif au nombre d'institutions impliquées dans le processus de contagion, l'autre relatif à l'ordre auquel la contagion stable est atteinte.

Le premier outil est un critère qui renvoie au nombre d'institutions touchées par le phénomène de contagion. Ce critère rejoint les définitions traditionnelles des fragilités financières et de la contagion telle que la littérature l'entend. Le second outil est une mesure inspirée de Lagunoff et Schreft (2001), et renvoie à la vitesse à laquelle la propagation se réalise dans le système. Ces derniers considèrent qu'une économie A est plus fragile qu'une économie B si la date de rupture des liens dans le réseau est antérieure dans l'économie A par rapport à l'économie B. Ici l'idée est légèrement différente, il s'agit de mesurer la vitesse de contagion, non à partir d'une date, mais à partir de l'ordre auquel la contagion a lieu. L'ordre de contagion se définit par l'enchaînement des étapes de contagion à partir de l'occurrence du choc systémique. Pour un même nombre de banques en difficulté, le réseau est dit plus fragile si l'ordre de contagion est plus bas. On peut donc proposer les deux définitions suivantes :

**Définition 4** *La fragilité d'un réseau est sa capacité à transmettre l'événement systémique au long des liens qui le composent en amplifiant les besoins de liquidité. Sa mesure peut se faire sous deux axes à court terme :*

*i) Fragilité en nombre : il s'agit de mesurer le nombre d'institutions atteintes par le phénomène de contagion.*

*ii) Fragilité en vitesse : un réseau  $V$  est plus fragile en vitesse qu'un réseau  $V'$  si pour un nombre de banques atteintes par la contagion identique, on atteint le niveau de contagion stable à un ordre inférieur.*

*A contrario, on définira un réseau comme résistant en nombre si la contagion est limitée à un petit nombre de participants, et, un réseau résistant en vitesse si l'ordre de contagion à court terme est élevé.*

On est alors en mesure de connaître l'ampleur de la crise en la mesurant à la quantité d'actifs interbancaires liquidés de manière précoce, ou, au nombre de banques insolubles et donc en faillite une fois le phénomène de propagation de l'illiquidité achevé.

Comme la définition 1 le précise, en effet, une banque, qui ne peut retirer du réseau interbancaire les moyens nécessaires pour faire face à ses échéances, est insolvable. Elle est liquidée et conduite à la faillite. Ses créanciers interbancaires se répartissent la valeur de liquidation de tous ses actifs, en proportion de leur part dans le total du passif interbancaire de la banque liquidée. Chaque banque  $j$  créancière d'une banque en faillite reçoit  $\Pi_{ij}p_i$  qu'elle ait demandé ou non le remboursement anticipé. Un tel versement est un signal de la faillite d'une institution partenaire débitrice. Cependant, ce signal ne véhicule aucune information utile à la banque créancière qui n'aurait pas demandé de remboursement anticipé, dans la mesure où les paiements ont lieu une fois la transmission des demandes de remboursements anticipés achevée.

### Crise et valeur des paiements interbancaires

La mesure de la crise renvoie aux paiements interbancaires qui ont lieu en  $t = 1$  et qui déterminent le nombre de banques insolvable mises en faillite. En effet, si les paiements reçus par la banque  $j$  du reste du système ne couvrent pas le montant de sa dette nominale, alors, toujours en suivant l'ordre de liquidation des actifs, la banque  $j$  est contrainte de liquider ses actifs longs. Conformément à la définition 1, la banque est donc en faillite et disparaît du système. En suivant Eisenberg et Noe (2001), on fait une hypothèse de limitation des paiements interbancaires qui implique qu'un débiteur ne paye jamais plus que ce qu'il doit à ses créanciers. Ainsi, en cas de faillite de la banque  $j$  le montant de ses règlements interbancaires est égal au minimum de  $\bar{p}_j$  et de la valeur de liquidation de ses actifs. Dès lors,  $p_j$  valeur des paiements effectués par la banque  $j$  en  $t = 1$  en cas de liquidation à ses créanciers, est égal à :

$$p_j = \min \left[ b + rk_j + \sum_{k=1}^n \Pi_{jk}^T p_k, \bar{p}_j \right] \quad (4.8)$$

où  $b + rk_j + \sum_{k=1}^n \Pi_{jk}^T p_k$  représente la valeur de liquidation des actifs de la banque  $j$  en  $t = 1$ . Celle-ci se décompose en  $b$  unités d'actif court terme,  $rk_j$  provenant de la vente à la casse des actifs longs, et la valeur de règlement anticipée des créances interbancaires détenues par la banque  $j$  donnée par  $\sum_{k=1}^n \Pi_{jk}^T p_k$ .  $\bar{p}_j$  représente la valeur de la dette nominale de  $j$ . La valeur des paiements réalisés par la banque  $j$  dépend donc de la valeur des paiements des banques débitrices de  $j$ , qui dépend elle-même de la valeur des paiements des débiteurs de ses débiteurs, etc...

La valeur des paiements effectués par la banque  $j$  nous informe sur son statut. Si elle touche de la part de ses débiteurs un montant suffisant pour faire face à ses créanciers, par définition, la banque n'est pas insolvable, elle n'est donc pas en faillite. Elle survit jusqu'en  $t = 2$  à la condition que ses déposants ne la conduisent pas au dépôt de bilan en raison des retraits qu'ils réalisent, ce qui est exclu par hypothèse. Elle règle alors à ses créanciers  $\bar{p}_j$ . En revanche, si le montant touché par les débiteurs ne permet

pas de faire face au montant nominal de la dette, la banque  $j$  est insolvable, elle est conduite à la faillite et ses créanciers s'emparent de l'intégralité de sa valeur, selon la règle standard de priorité des créanciers en droit des faillites, soit  $b + rk_j + \sum_{k=1}^n \Pi_{jk}^T p_k$ .

Le niveau de paiement de chaque banque est donc lié à la structure générale du réseau et aux règlements effectués par chacun des noeuds du système. Cet enchaînement potentiel de paiements anticipés est réalisé au cours de la période  $t = 1$ .

**Définition 5** *Il existe deux moyens de mesurer l'ampleur de la crise bancaire :*

- i) Une première mesure est donnée par la taille relative des actifs interbancaires liquidés de manière précoce en regard du total des actifs ;*
- ii) Une seconde mesure est donnée par le nombre d'institutions bancaires qui sont contraintes à la faillite (ce nombre peut être différent du nombre d'institutions impliquées dans la propagation).*

Notons que le nombre de faillites dépend de la liquidité disponible dans le système,  $b$ , de la valeur des actifs à la casse donnée par  $r$  et de la structure du réseau comme nous le verrons dans les sections ultérieures.

Sans événement systémique, il n'y a pas de paiements interbancaires lors de la période intermédiaire puisque l'intégralité de la dette est de long terme. En revanche, si un événement systémique se produit, les demandes de remboursements anticipés se répercutent au long du réseau, et conduisent à des paiements qui déterminent l'ampleur de la crise. Dans un tel système de paiements, la présence du réseau crée des obligations en cascade. Dès lors, l'existence d'un vecteur de paiement et son unicité est un problème non trivial. Avant de déterminer l'influence exacte de la structure du réseau sur l'enchaînement de la contagion, sur la valeur des paiements, et au final, sur l'ampleur de la crise, il est donc nécessaire de démontrer l'existence et l'unicité du vecteur de paiement en cas d'événement systémique. En cas d'événement systémique, chaque banque touchée par la contagion paye à ses créanciers interbancaires, prioritaires sur les déposants, en  $t = 1$  le minimum de ce qu'elle doit et de ce qu'elle possède. Le vecteur



de paiement (que l'on appellera vecteur de paiement de faillite) est donc un point fixe  $p^*$  de la fonction  $F(.; \Pi; \bar{p}; rk, b)$  de  $[0, \bar{p}]$  dans  $[0, \bar{p}]$  définie par

$$F(.; \Pi; \bar{p}; rk, b) \equiv \min [b + rk + \sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j, \bar{p}_i]$$

**Proposition 1** *En cas d'événement systémique, les paiements interbancaires en  $t = 1$  sont non nuls. Le vecteur décrivant ces paiements existe et il est unique.*

(Voir démonstration en annexes 4.4.1 et 4.4.2)

Les banques font face à une contagion mécanique : le défaut d'une banque en  $t = 1$  a des effets en cascade à travers le système. Le défaut d'une banque réduit les paiements de cette banque aux autres banques du réseau, ce qui peut conduire à des défauts subséquents des créditeurs en raison des externalités négatives issues de la rupture des liens de crédits liant une banque débitrice à des tiers. La proposition 1 permet donc de montrer que les règles de paiements définies dans le modèle permettent de spécifier une unique division de la valeur entre les banques au cas où elles sont soumises à un événement systémique. L'existence et l'unicité du vecteur de paiement de faillite ne dépend pas de la structure du réseau. Celle-ci n'intervient que dans la détermination de la valeur des paiements, et donc dans l'ampleur de la crise finalement constatée. On verra ainsi dans les sections ultérieures que la valeur des paiements dépend de caractéristiques précises de la structure du réseau.

Notons que les déposants ne jouent pas stratégiquement ici, seules les banques le font. Si les déposants jouaient de manière stratégique, les résultats ne pourraient qu'être renforcés vers plus d'instabilité. Il faut remarquer que dans l'histoire financière récente les paniques bancaires sont bien plus liées à des mouvements de paniques interbancaires qu'à des retraits anticipés des déposants. Ceci a particulièrement bien été illustré par la crise asiatique comme le soulignent Chang et Velasco (1998) ou Corsetti et alii (1998a, b), en particulier lors de la panique interbancaire de Hong Kong en novembre 1997. Lors de cet épisode en effet les banques, japonaises en particulier, se sont brutalement

et massivement désengagées de leurs prêts interbancaires sur leurs homologues en Asie du Sud, créant un mouvement de panique sur le marché interbancaire.

#### 4.1.5 Contagion et crise bancaire à long terme

Un événement systémique isolé peut donc se propager facilement le long des chaînes d'actifs à court terme, et le programme précédent nous donne le chemin suivi par la propagation pas à pas. Une fois la propagation terminée, ce programme nous permet de mesurer l'ampleur de la crise bancaire en regard des critères donnés par la définition 5. Cependant, outre ce phénomène à court terme, il existe également un effet lié au réseau à long terme.

Une fois la propagation réalisée et les paiements interbancaires courts faits, selon la structure du réseau un certain nombre de banques peuvent ne pas avoir été contraintes à la faillite. Les banques ainsi survivantes sont soit les banques qui n'ont pas été touchées par la contagion décrite dans la sous section précédente, soit les banques qui ont été touchées mais qui furent en mesure de faire face à leurs paiements interbancaires sans liquider leurs actifs productifs longs. En  $t = 2$ , il est donc nécessaire de considérer le sous réseau issu de cette situation afin de mesurer la valeur des paiements interbancaires qui y prennent place, ainsi que les paiements faits aux déposants.

A l'issue de la contagion et de la crise en  $t = 1$ , les banques survivantes à la période  $t = 2$  peuvent ne pas toucher de leurs débitrices les montants attendus contractuellement, selon la situation de ces dernières issue de la période 1. Dès lors, elles peuvent se trouver elles aussi incapables de faire face à leurs propres obligations interbancaires nominales. Il s'en suit donc un processus de contagion des défauts de paiements. Il faut noter que la matrice des liens interbancaires a été affectée par la contagion et les faillites de la période intermédiaire. Si la banque  $i$  est en faillite à la période  $t = 1$  alors, la valeur de ses passifs nominaux en  $t = 2$  est ramenée à 0. Ses créanciers ne pourront rien recouvrer à cette date. En notation matricielle, si la banque  $i$  est en faillite en  $t = 1$ , en  $t = 2$  on a  $L_{ij} = 0 \quad \forall j \in V_n$ . On fait donc face à une nouvelle matrice des

liens de passifs bilatéraux  ${}_{(2)}M$  où pour tout  $M_{ij} \neq 0$  (c'est à dire pour deux banques liées par une relation de crédit)

$$M_{ij} = {}_{(2)}M_{ij} = 1 \quad (4.9)$$

quand la banque  $i$  n'est pas en faillite, et

$${}_{(2)}M_{ij} = 0 \quad (4.10)$$

quand la banque  $i$  est en faillite.

Pour obtenir la matrice  ${}_{(2)}M$ , construisons  $Q$ , la matrice synthétisant les faillites à la fin de la période  $t = 1$ . On a :

$$Q_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (4.11a)$$

$$Q_{ii} = 1 \text{ si la banque } i \text{ est survivante} \quad (4.11b)$$

$$Q_{ii} = 0 \text{ si la banque } i \text{ est en faillite} \quad (4.11c)$$

et par suite,

$${}_{(2)}M = QM \quad (4.12)$$

Pour décrire la matrice des passifs relatifs on considère la matrice  ${}_{(2)}\Pi$  définie par

$${}_{(2)}\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{{}_{(2)}M_{ij}}{\bar{p}'_i} & \text{si } \bar{p}'_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $\bar{p}'_i$  désigne la valeur totale des passifs de la banque  $i$  envers le système survivant. Les passifs détenus par les banques en faillite ont en effet été liquidés à la période  $t = 1$ . On note  ${}_{(2)}M^T$  la transposée de  ${}_{(2)}M$ , et  ${}_{(2)}\Pi^T$  la transposée de  ${}_{(2)}\Pi$ . Les hypothèses de priorité absolue des créanciers interbancaires et de limitation du montant des paiements, sont à nouveau valides lors de la période  $t = 2$ . La valeur des paiements entre les banques survivantes est égale au minimum de ce que chaque banque doit et de ce qu'elle possède. Le montant des dettes en  $t = 2$  est de  $\bar{q} = (1 + \rho)\bar{p}'$ . Le vecteur de

paiement est donc un point fixe  $q^*$  de la fonction  $G(., \Pi', p, \bar{q}, R^*k^*)$  de  $[0, \bar{q}]$  dans  $[0, \bar{q}]$  définie par

$$G(., (2) \Pi, p, \bar{q}, R^*k^*) \equiv \min \left[ Rk^* + \sum_{j=1}^n (2) \Pi_{ij}^T p'_j, \bar{q} \right] \quad (4.14)$$

A la fin de la période 2 les banques sont liquidées, qu'il y ait eu un événement systémique initial ou non. Dans le cadre de ce chapitre, on se centre sur l'étude de la contagion et de la crise suite à l'occurrence d'un événement systémique non prévu. L'ampleur des pertes enregistrées au cours de la période  $t = 2$  ne dépend que de l'évolution du réseau au cours de la période  $t = 1$ . La question qui se pose en  $t = 2$  n'est pas une question de contagion de l'illiquidité, mais seulement une question de valeur des vecteurs de paiements entre les banques survivantes. On pourrait montrer, comme on l'a fait pour la proposition 1, l'existence et l'unicité du vecteur paiement en  $t = 2$ . La période 2 est une simple période de liquidation généralisée des actifs, de paiements interbancaires et de retraits des déposants. Lors de cette période, dès lors, le fonctionnement de l'économie est tout à fait similaire à la description du fonctionnement de la crise pour la période  $t = 1$ , mais avec en  $t = 2$  une structure de réseaux qui est la résultante des faillites enregistrées en  $t = 1$ . L'analyse exhaustive de cette période ne constitue donc pas un apport. Elle a donc été exclue de ce chapitre.

## 4.2 Contagion dans un réseau à 6 banques : un exemple introductif

Une structure à 6 banques nous permet d'étudier la plupart des structures polaires typiques que l'on retrouve dans un réseau à  $n$  banques. Ces structures sont les suivantes : le réseau en ligne, le réseau circulaire, le réseau en étoile (avec centre créateur ou débiteur), et, le réseau complet (symétrique ou asymétrique).

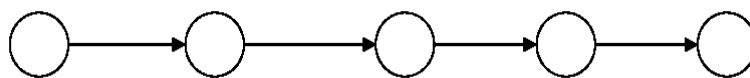


FIG. 4.2 – Réseau en ligne à 6 banques

### 4.2.1 Le réseau en ligne

La matrice des passifs est donnée comme suit

$$L = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

En  $t = 1$ , on considère le vecteur de faillite initial suivant

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La faillite initiale de la banque 1 conduit à une demande de remboursement anticipé sur la banque 2, qui répercute cette demande sur la banque 3. Ces répercussions en chaîne se poursuivent jusqu'à ce que la demande de remboursement anticipée touche la banque 6 qui ne dispose d'aucun actif. Ainsi s'achève la contagion des demandes de remboursement anticipé au long du réseau. La faillite initiale qui conduit à un excès de demande de liquidité se propage donc au long de tout le réseau. Du fait de la linéarité du réseau, toutes les banques liquident leurs actifs interbancaires. Toutes les demandes de remboursement anticipé se compensent. On entre alors dans la description de la crise avec la liquidation des actifs interbancaires et les faillites : les banques se retrouvent, en effet, contraintes de liquider leurs actifs longs de manière à faire face aux demandes de

remboursement anticipé de leurs emprunts. Pour faire face à la demande de la banque 5, la banque 6 est contrainte de liquider ses actifs longs, elle est donc en faillite. La valeur de cette banque échoit donc à son créancier interbancaire (la banque 5). Le flux interbancaire versé par 6 vaut alors en  $t = 1$  :

$$p_6 = b + rk_6^*$$

Toutes les banques ne disparaissent pas nécessairement une fois le cycle de contagion à court terme terminé. En effet, à chaque étape de remboursement, une partie de la perte initiale est absorbée par les actifs liquides. Ainsi, la banque 5 enregistre une perte sur la valeur de son actif interbancaire, puisque le paiement de la banque 6 est par hypothèse inférieur à la valeur de la créance  $l$ . Dès lors, la banque 5 est également contrainte de liquider ses actifs longs pour payer le montant de sa dette vis-à-vis de la banque 4. Ce paiement vaut :

$$p_5 = b + rk_5^* + (b + rk_6^*) \quad (4.17)$$

Si le versement de la banque 5, permet à son créancier (la banque 4) de recouvrer un montant au moins égal à  $l$ , c'est-à-dire si  $p_5 > \bar{p}_5 = l$ , alors la banque 4 n'est pas contrainte de liquider ses actifs longs pour payer ses passifs exigés. Seules les banques 5 et 6 sont en faillite en  $t = 1$ . En effet, à partir de la banque 4 en remontant la chaîne, les banques sont en mesure de faire face au paiement anticipé de la dette sans liquider les actifs longs. Le long d'une chaîne de crédit, la crise ne touche qu'une partie de la chaîne à court terme. Cette chaîne de banques en faillite est d'autant plus longue que la valeur de liquidation des actifs longs à la casse,  $r$ , est faible. Elle est d'autant plus courte que les montants en réserves sont élevés.

**Conjecture 2** *La longueur des chemins créditeurs, et la valeur de liquidation des actifs longs sont des facteurs réducteurs de l'ampleur de la crise.*

Cette conjecture fera l'objet d'une généralisation et d'une proposition dans la section 4.3

Si, outre la banque 1, seules les banques 5 et 6 disparaissent, le réseau est désormais décrit par la matrice

$${}_{(2)}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Les banques 2, 3 et 4 sont survivantes. A la période  $t = 2$ , la banque 4 dispose d'une créance douteuse sur la banque 5 qui a disparu. Elle ne sera donc pas remboursée du montant prêté. La valeur de la banque 4 se réduit alors à la valeur de ses actifs longs,  $R^*k_4^*$ . Cette valeur, par hypothèse, permet à la banque 4 de faire face à son passif interbancaire, ce qui met un terme aux défauts de paiements. Néanmoins, les déposants de cette banque sont lésés. Les banques 3, 2 et 1 sont donc en mesure de faire face à l'intégralité de leurs paiements tels que prévus par le programme de maximisation. Seule une partie du réseau interbancaire est en faillite. On peut aisément généraliser, ces mécanismes. Si la banque  $i$  ( $i \in [1, 6]$ ) est touchée par l'évènement systémique, l'illiquidité impliquera les banques  $i$  à 6. Le nombre de banques insolubles sera inférieur ou égal au nombre de banques illiquides.

### 4.2.2 Le réseau circulaire

Cette structure est particulière dans la mesure où les banques mettent en oeuvre le même niveau d'investissement productif que dans le cas où elles demeurent en autarcie, et ce du fait de la normalisation de la valeur des prêts et de la présence d'une proportion de déposants précoces identique quelle que soit la région.

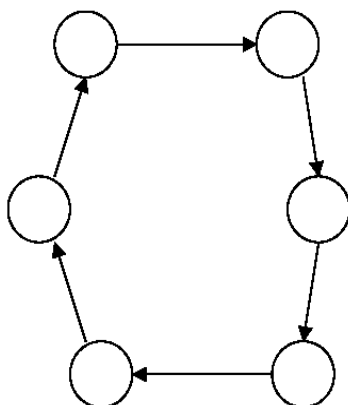


FIG. 4.3 – Réseau circulaire à 6 banques

La matrice des passifs est donnée comme suit

$$L = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

En  $t = 1$ , on considérera le vecteur de faillite initial suivant

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

La transmission des demandes de remboursement anticipé suit exactement le même cheminement que dans le cas du réseau en ligne, jusqu'à toucher la banque 6 qui se retourne contre son seul débiteur interbancaire qui est la banque 1. Cependant cette dernière est la banque touchée par l'événement systémique initial, et par hypothèse, elle ne rembourse pas ses dettes. On se retrouve donc exactement dans le même cas que dans le cas du réseau en ligne. Du fait de la circularité du réseau, quelle que soit la banque touchée par l'événement systémique initial, l'enchaînement est identique.



### 4.2.3 Le réseau en étoile

On a trois possibilités : l'étoile avec centre créditeur, l'étoile avec centre débiteur, l'étoile où le centre est à la fois débiteur et créditeur (ci-après dénommé centre mixte).

#### L'étoile avec centre créditeur

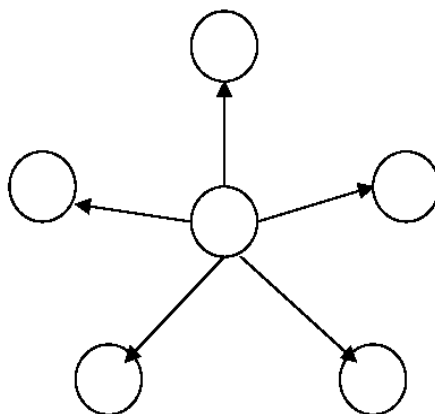


FIG. 4.4 – Réseau en étoile avec centre créditeur

En supposant que la banque 1 est le centre de l'étoile, la matrice des passifs est donnée par

$$L = l \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & . & 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & 0 & . & . \\ 1 & . & . & . & 0 & . \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Si la banque 1 est en faillite, alors

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

tous les actifs interbancaires sont liquidés avant terme, et l'ensemble du réseau disparaît en une étape. 5 banques sont liquidées en une étape en  $t = 1$ .

Si une banque  $i \neq 1$  est en faillite, on a en revanche

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

il n'y a aucune contagion en  $t = 1$ . La seule banque en faillite est la banque touchée par l'événement systémique initial. L'illiquidité ne se propage pas le long du réseau en  $t = 1$ . En revanche, en  $t = 2$  la banque 1 ne touche aucun remboursement de la part de la banque liquidée en  $t = 1$ . Le bien être des déposants de la région au centre est dégradé.

### L'étoile avec centre débiteur

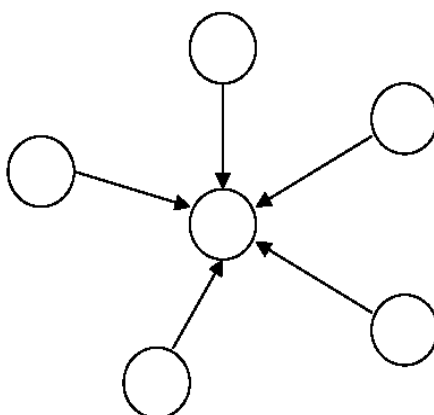


FIG. 4.5 – Réseau en étoile avec centre débiteur

En supposant que la banque 1 est le centre de l'étoile, la matrice des passifs est

donnée par

$$L = l \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Les résultats sont inversés par rapport au cas précédent. Si la banque 1 est en faillite initiale, on ne constate aucune contagion en  $t = 1$ . La banque au centre est alors la seule à être en faillite en  $t = 1$ . En revanche, si une banque de la périphérie est en faillite initiale, la banque 1 est contrainte de liquider ses actifs à la période  $t = 1$ , et en  $t = 2$  toutes les banques enregistrent une perte, mais il n'y a pas de phénomène de transmission au long du réseau.

### L'étoile avec centre mixte

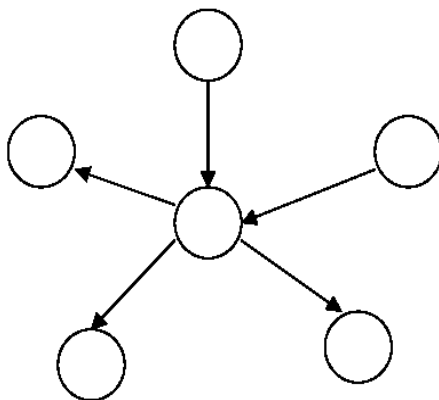


FIG. 4.6 – Réseau en étoile avec centre mixte

Dans ce cas, l'étoile est à la fois créditrice et débitrice. A titre d'exemple on peut

considérer la matrice  $M$  donnée par

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Dans ce cas, la banque 1 est créditrice sur 2 et 3 mais débitrice sur 4, 5 et 6. Si 1 subit l'événement systémique,

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

les actifs de 1 sur 2 et 3 sont liquidés, et il n'y a pas de contagion ultérieure. Si 2 ou 3 subissent l'événement systémique, il n'y a aucune contagion par définition en  $t = 1$ , car ces banques ne disposent d'aucun actif interbancaire. Si les banques 4, 5 ou 6 subissent l'événement systémique alors on a (cas où 4 subit l'événement systémique)

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

la banque 4 liquide son actif sur la banque 1 qui va liquider à son tour ses actifs sur les banques 2 et 3.

**Conjecture 3** *Dans le cas d'une étoile pure (créditrice ou débitrice), la contagion est bimodale, selon la nature des liens liant le centre à la périphérie. On constate au plus 2 étapes de contagion.*

#### 4.2.4 Le réseau complet

La définition du réseau complet dépend de la situation individuelle de chaque banque en regard du niveau d'investissement de long terme qui maximise le rende-

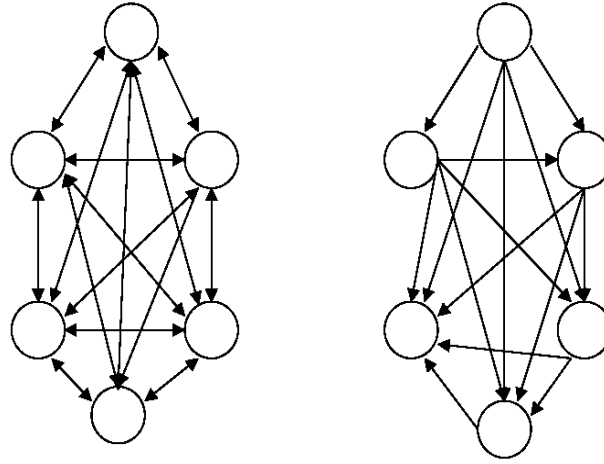


FIG. 4.7 – Les deux types de réseaux complets

ment par unité investie. Dans un réseau complet à 6 banques, chaque banque est liée à 5 partenaires de crédit. Deux cas polaires se présentent. Le premier est comparable à celui décrit par Allen et Gale (2000). Il est représenté à gauche de la figure 4.7. Il s'agit d'un réseau symétrique complet dans lequel le bilan de chaque banque exhibe à la fois une créance et une dette de même montant envers toutes les autres banques du système. Le second cas polaire est celui d'un réseau dans lequel la construction des liens est faite de la manière suivante : toutes les banques sont liées les unes aux autres par 5 relations de crédits, mais, on considérera que la banque 1 dispose de 5 liens créditeurs, alors que la banque 2 n'en dispose que de 4, la banque 3 de 3, la banque 4 de 2, la banque 5 de 1. La banque 6 ne dispose donc d'aucun liens créditeurs, mais seulement de 5 relations débitrices. Il est représenté à droite sur la figure 4.7. En ce cas, la matrice  $M$  peut s'écrire

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Selon la banque en faillite initiale, la contagion de premier ordre de l'événement systémique sera plus ou moins étendue. Si la banque 1 disparaît, les demandes de remboursements anticipés qui en découlent touchent l'ensemble du réseau (les banques 2 à 6).

$$M. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

dès lors, la contagion de premier ordre touche l'ensemble des banques. Les banques 2 à 6 sollicitent le remboursement anticipé de leurs créances interbancaires. La contagion de second ordre est donnée par :

$$M. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

ce vecteur de contagion de second ordre peut se lire comme suit : la banque 6 est contrainte de rembourser de manière anticipée 5 unités d'emprunt (sur un passif nominal total de 5 unités) ; la banque 4 doit rembourser de manière anticipée 4 unités (sur un passif nominal de 4 unités), etc.... Comme on a  $Z^{(1)} = (1)$ , tous les actifs interbancaires sont appelés en deux étapes de contagion. Cet ensemble de remboursements anticipés conduit à la destruction de l'ensemble des liens de crédits présents dans le réseau en deux itérations.

Si la banque 2 est en faillite initiale on obtient

$$X^{(1)} = M. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Ce qui implique que les banques 3 à 6 font alors face à la demande de remboursement anticipé de la banque 2, ce qui correspond à a contagion de premier ordre. Le vecteur d'état consolidant la situation de toutes les banques dans le réseau est

$$Z^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Les banques 2 à 6 font face à une demande de remboursement anticipé sur leurs passifs interbancaires, ce qui décrit la contagion de second ordre. Le produit de  $M$  avec ce vecteur donne

$$X^{(2)} = M.Z^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

ce qui correspond à des demandes de remboursement anticipé auprès des banques 3 à 6 de une, à quatre unités de prêts. En réalité, toutes les banques liquident leurs actifs interbancaires à l'exception de la banque 1 qui ne dispose que de liens créditeurs et ne fait face à aucune demande de remboursement anticipé. Le calcul du vecteur d'état après la contagion de second ordre, dont les éléments sont donnés par  $Z_i^{(2)} = Z_i^{(1)} + (1 - Z_i^{(1)})X_i^{(2)}$  donne :

$$Z^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

La contagion à court terme ne va donc pas plus loin puisque l'on a  $Z^{(2)} = Z^{(1)}$ . L'ampleur de la contagion à court terme est donc limitée par la taille de l'actif interbancaire de la banque en faillite initiale. Plus cette taille est importante, c'est à dire, plus le

portefeuille interbancaire de la banque en faillite est diversifié, plus la diffusion de l'événement systémique est étendue à la période  $t = 1$ .

**Conjecture 4** *Le réseau complet est très fragile. L'ordre de contagion est de 2, le nombre de banques atteintes par la contagion est une fonction croissante de la taille des voisinages sortants des banques.*

Cet exemple introductif souligne que l'on doit distinguer deux éléments clé pour comprendre la question de la fragilité dans les réseaux interbancaires, comme nous l'avons fait au long de ce chapitre. Celle-ci dépend en effet de deux éléments distincts : d'une part, la propagation de l'événement systémique mesure la contagion au sein du système - c'est un indicateur d'illiquidité -, et d'autre part, le nombre d'institutions au final en faillite mesure l'ampleur de la crise - c'est un indicateur d'insolvabilité -.

### 4.3 Généralisation à un réseau à $n$ banques

La généralisation de l'étude à un réseau à  $n$  banques impose de considérer différentes structures exogènes de réseaux pour y étudier l'ampleur de la contagion. On procédera en trois temps. Nous établirons dans un premier temps des résultats sur la contagion dans les structures de réseaux simples, c'est-à-dire pour un ensemble de structures typiques comme l'étoile, le réseau circulaire, le réseau complet, la ligne. Puis dans un second temps nous généraliserons nos conclusions sur la contagion en nous dotant d'outils de caractérisation des structures de réseaux sans présupposer la structure générale de ces derniers. Enfin dans un troisième temps nous aborderons la question de la mesure de l'ampleur de la crise dans les différentes structures de réseaux.

#### 4.3.1 Caractérisation de la contagion dans les structures de réseaux simples

A partir de l'exemple à 6 banques avec des structures de réseaux purs, il est relativement aisé d'obtenir des résultats sur la nature et l'ampleur de la contagion dans les



structures simples à  $n$  banques. Pour ce faire, on étudie chacun des réseaux selon les deux critères de fragilité proposés à la définition 4 (fragilité en nombre et en vitesse). On obtient ainsi la proposition suivante.

**Proposition 2** *Selon le critère de la fragilité pris en compte, on peut classer les réseaux simples du plus au moins fragile.*

*i) fragilité en nombre : le cercle, le réseau complet, le réseau en ligne, le réseau en étoile créditrice, le réseau en étoile débitrice.*

*ii) fragilité en vitesse : l'étoile, le réseau complet, le réseau en ligne, le cercle.*

(Voir démonstration en annexe 4.4.3)

Les réseaux se comportent de manière distincte selon le critère de fragilité étudié. Dans le réseau en cercle quelle que soit la banque atteinte, l'illiquidité se propage de proche en proche jusqu'à atteindre l'ensemble des  $n$  banques parties prenantes au réseau. Cependant, la structure du réseau fait que cette propagation pour être complète nécessite un nombre d'itérations du processus égal à  $n$ . Si l'on compare l'ordre de contagion stable dans les différents réseaux, c'est dans le réseau en cercle que cet ordre est le plus élevé. De manière similaire, le réseau en ligne est fragile en nombre mais résistant en vitesse. La structure du réseau en ligne et du cercle ne diffèrent l'une de l'autre que par un unique lien. Cependant ce lien est crucial dans la mesure où c'est au travers de celui-ci que la propagation peut toucher l'ensemble des banques dans le réseau en cercle, alors qu'elle demeure limitée dans le réseau en ligne à l'ensemble des banques débitrices directes ou indirectes de la banque touchée par l'événement systémique initial. Ces types structures de réseaux semblent souligner que la longueur des chemins est un frein à la propagation en vitesse de l'événement systémique.

Le réseau complet présente un ordre de contagion égal à 2 quelle que soit la banque touchée de manière initiale. On atteint l'ordre de contagion stable au bout de deux itérations seulement. La croissance du nombre de liens semble être un facteur aggravant

de la contagion. Elle agit en effet comme un facteur de dissémination de l'événement systémique initial. Nous sommes ici en mesure de prouver, qu'en  $t = 1$ , plus le degré de chaque participant au réseau est élevé, plus le réseau est fragile en nombre et en vitesse. La propagation des difficultés décrite par le système  $MX$  est d'autant plus rapide que la matrice  $M$  décrivant le réseau est composée de vecteurs de norme élevée.

Dans le réseau en étoile, la nature des liens, et la localisation de l'événement systémique déterminent la contagion en nombre. Quel que soit le réseau (étoile créditrice ou débitrice), et quelle que soit la banque touchée, l'ordre de contagion est toujours égal à un. Cependant, la fragilité en nombre se place aux valeurs extrêmes. Si le centre créditeur est touché par l'événement systémique initial, le réseau est très fragile en nombre et en vitesse. Toutes les banques sont touchées par le manque de liquidité dès l'ordre 1. En revanche, si une banque débitrice du centre est touchée, elle demeure la seule banque illiquide. Dans le cas de l'étoile débitrice, si le centre est touché par l'événement systémique, il demeure le seul illiquide, et il n'y a pas de propagation, si c'est une banque de la périphérie qui est touchée de manière initiale, la transmission se fait vers le centre en une étape, et seules ces deux banques sont touchées. Ce caractère particulier de la contagion dans le réseau en étoile est noté par Freixas et alii (2000). Ils montrent en effet que la faillite d'une banque de la périphérie a peu ou pas d'effet systémique alors que la faillite du centre conduit à une propagation de l'illiquidité dans le réseau. Notre apport est, sur cette structure, de raffiner le résultat en distinguant la fragilité en nombre et la fragilité en vitesse, critères pour lesquels le comportement systémique du réseau en étoile est distinct.

### 4.3.2 Caractérisation de la contagion dans les structures de réseaux quelconques

Nous disposons d'une caractérisation simple de la contagion en fonction de la topologie de chaque réseau dans les structures simples. Ces réseaux reproduisent des structures typiques rencontrées dans la littérature : la ligne, le réseau en étoile, le ré-

seau complet, le réseau circulaire. Cependant, la réalité des réseaux interbancaires ne se rapproche pas de ces réseaux purs, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1. La structure de ces réseaux peut être vue comme une combinaison de réseaux purs. Les contributions de Mueller (2003) sur le réseau interbancaire suisse, et de Degryse et Nguyen (2004) sur le réseau interbancaire belge sont à cet égard éclairante.

Ainsi, dans le cas du réseau interbancaire suisse, Mueller (2003) décrit le réseau comme de faible densité, marqué par une forte centralisation. La variance de la distribution du nombre de créiteurs auprès de chaque banque est très élevée (411), la distribution est décalée à droite et les queues de distribution sont très fines. 4 banques ont un degré débiteur très supérieur aux autres. Ce décalage va dans le sens de la modélisation ici choisie dans la mesure où apparaissent dans le réseau interbancaire suisse des banques à la fois créditrices et débitrices, mais avec des positions courtes ou longues marquées. En réalité, le réseau interbancaire suisse peut être divisé en plusieurs sous réseaux. Le réseau des banques cantonales est assez homogène (en degré), et sa densité est plus élevée que celle du réseau interbancaire dans son ensemble. Le réseau des banques régionales est très centralisé autour d'un petit nombre de participants qui concentrent la plupart des relations de crédit.

Degryse et Ngyen (2004) notent, en outre, que dans le réseau interbancaire belge, la plupart des transactions interbancaires transitent par l'intermédiaire d'un nombre limité de banques de grande taille<sup>8</sup>. Ils soulignent en particulier que les banques de moindre importance ont réduit leur exposition au marché interbancaire belge. Ces dernières sont peu liées les unes aux autres, et ont de plus en plus tendance à transiter via une grande banque qui joue à leur égard un rôle de fournisseur ou de client pour la liquidité. Ceci suggère donc que la topologie du marché interbancaire tend à se rapprocher d'une structure en étoiles interconnectées. Dans cette structure quelques grandes banques fédèrent un voisinage de banques (créditrices ou débitrices) de taille élevée, ces banques n'ayant elles-mêmes qu'un voisinage de taille réduite. Ces noeuds

---

<sup>8</sup>"Grande" doit ici s'entendre comme relatif à la taille Produit Net Bancaire (PNB).

centralisateurs au sein du réseau sont liés entre eux, et le montant de leur exposition bilatérale est alors élevé.

On est donc assez loin des structures typiques étudiées dans la section précédente. En outre, même pour les structures typiques, on voit que les résultats dépendent, pour certaines architectures, de la localisation de l'événement systémique dans le réseau. Ainsi, pour le cas du réseau complet, si l'événement systémique touche une banque non créditrice, alors la contagion est limitée.

Pour décrire le phénomène de contagion de façon plus générale, et avec des structures quelconques, il est donc nécessaire de se doter d'indicateurs caractérisant certaines propriétés des réseaux. A l'issue de l'analyse des différentes structures typiques, on a ainsi pu voir que le degré de fragilité dépend de la longueur des chemins liant les noeuds les uns aux autres, de localisation de la banque touchée de manière initiale, de la nature des liens entre le centre et la périphérie. Pour le cas des réseaux quelconques, nous retenons donc des concepts de théorie des graphes qui nous permettent de mesurer exactement l'effet de la structure du réseau sur la contagion et la faillite. En s'inspirant des résultats sur les réseaux typiques, on va donc successivement définir : le chemin de contagion potentielle, la centralité en valeur (des arcs entrants et sortants), et la connectivité du réseau.

**Définition 6** *On peut définir un chemin de contagion potentielle  $o(i)$  à partir de la banque  $i$  comme suit :*

$$o(i) = \{j \in V_n \mid \exists \text{ un chemin dirigé de } i \text{ vers } j\}$$

Le chemin de contagion potentielle décrit la cascade de créances (si l'on suit le sens des arcs sortants) par lesquels la propagation s'étend. En effet, cette dernière provient de la liquidation anticipée des dettes interbancaires longues par les banques créancières.

Afin de prendre en compte les effets de réseaux liées à localisation de la banque touchée de manière initiale, ainsi que ceux issus de la nature des liens entre le centre et la périphérie, il est nécessaire de mesurer la centralité des noeuds dans le réseau.

**Définition 7** *La centralité en valeur des arcs entrants vers la banque  $i$  est égale à la proportion des passifs de la banque  $i$  en regard des passifs totaux dans le réseau*

$$0 \leqslant vd_{in}(i) = \frac{\sum_{j=1}^n w(i, j)}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n w(j, k)} \leqslant 1 \quad (4.35)$$

où  $w(i, j)$  est la valeur de l'arc  $ij$ , donc la valeur de la dette de  $i$  envers  $j$ , normalisée ici à  $l$ .

**Définition 8** *La centralité en valeur des arcs sortants de la banque  $i$  est la proportion des actifs de la banque  $i$  en regard des actifs totaux dans le réseau.*

$$0 \leqslant vd_{out}(i) = \frac{\sum_{j=1}^n w(i, j)}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w(j, k)} \leqslant 1 \quad (4.36)$$

Par définition, la somme totale des actifs et des passifs sont égales.

Ces mesures de centralité nous permettent d'identifier les réseaux selon leur degré de polarité plus ou moins grand autour d'un certain nombre de noeuds centraux. Dans les réseaux en étoile, la banque au centre est liée à l'ensemble des banques de la périphérie, alors que les banques de la périphérie ne sont liées qu'au centre. Dès lors, si la banque  $i$  est au centre on a dans le cas de l'étoile créditrice, on a  $vd_{out}(i) = 1$ , et pour toute banque  $j \neq i$  de la périphérie  $vd_{out}(j) = 0$ .

Cette mesure ne nous renseigne cependant pas sur la connectivité du système, donnée par un autre indice dérivé de la mesure de centralité proposée par Bonacich (1987) et qui permet de déterminer le nombre de chemins de longueur  $k$  à partir d'un noeud quelconque  $i$ . Si l'on cherche à obtenir la mesure de la longueur des chemins créditeurs, il suffit de procéder comme suit. En élevant la transposée de la matrice  $M$ ,  $M^T$ , à la puissance  $k$  et en la multipliant par le vecteur (1), on obtient le nombre de chemin directs et indirects créditeurs de longueur  $k$  dans le réseau  $g$  au départ de  $i$ . On peut donc définir la connectivité d'une banque et d'un réseau comme suit :

**Définition 9** *La connectivité du noeud  $i$  est définie par le nombre de chemins directs et indirects créditeurs de longueur  $k$  dans le réseau  $g$  à partir de  $i$ . L'indice de connectivité*

du noeud  $i$  dans le réseau  $g$  est donné par  $\beta_i^k(g)$  avec

$$\beta^k(g) = (M^T)^k \cdot (1) \quad (4.37)$$

$$\beta_i^k(g) = \sum_{j=1}^n m_{ij}^{(k)} \quad (4.38)$$

**Définition 10** La connectivité totale du réseau  $\beta(g)$  est donnée par la somme des  $\beta_i^k(g)$  sur  $k$ . On obtient alors le nombre total de chemins directs et indirects depuis le noeud  $i$  pour toutes les longueurs possibles.

$$\beta(g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k(g) = \sum_{k=0}^{+\infty} M^{Tk} \cdot 1 \quad (4.39)$$

$$= (1 - M^T)^{-1} \cdot (1) \quad (4.40)$$

Notons que  $\beta_i^1(g)$  donne l'indice de centralité en valeur, en raison des hypothèses particulières du modèle quant à la valeur normalisée de la dette. L'utilisation de ces indicateurs de réseau va nous permettre d'aller au delà des structures typiques, pour au final considérer des configurations se rapprochant des structures effectivement constatées par les contributions de Mueller (2003) sur le marché interbancaire suisse, Boss et alii (2003) sur le marché interbancaire autrichien, et Degryse et Nguyen (2003) sur le marché interbancaire belge. Il est alors possible de tirer un certain nombre de conclusions sur la fragilité des différentes structures, et leur exposition à la contagion systémique. Les données nous étant manquantes tant sur le marché français que sur le marché européen, il n'est pas possible d'éclairer notre analyse en regard de la structure de ces deux marchés en menant une analyse empirique. On peut établir la proposition suivante :

**Proposition 3** La fragilité en nombre et la fragilité en vitesse sont des fonctions croissantes de  $\beta(g)$ .

(Voir démonstration en annexe 4.4.4).

La connectivité mesure le nombre de chemins directs et indirects de longueur quelconque à partir de toutes les banques dans le système. La fragilité du système augmente avec la connectivité de celui-ci. En effet, un accroissement du degré de connectivité conduit ainsi non seulement à un accroissement du nombre de banques illiquides, mais permet également d'atteindre plus rapidement l'ordre de contagion stable. L'accroissement de la connectivité du réseau correspond donc à un accroissement du nombre de chemins de contagion possibles. Dès lors, l'illiquidité initiale est disséminée vers un nombre de banques plus important. La vitesse de propagation de l'illiquidité dépend également de la connectivité totale du réseau. L'ordre de contagion stable est une fonction décroissante de la connectivité du réseau. Plus la connectivité du réseau est élevée, plus l'ordre de contagion stable est donc atteint pour un niveau bas. Ce résultat est conforme aux modèles de percolation décrit par les physiciens comme Hammersley et Broadbent (1956) pour rendre compte de la contagion dans un système suite à des variations localisées de l'état des agents parties prenantes au réseau. Ces modèles tendent à montrer que la contagion dépend positivement de la connectivité du système dans son ensemble.

### **4.3.3 Mesure de l'ampleur de la crise à court terme selon la structure du réseau**

La mesure de la crise renvoie à la mesure des paiements interbancaires. Ces paiements ont lieu une fois la contagion de l'illiquidité achevée, ils déterminent la situation de solvabilité des banques, et au final toute banque insolvable est déclarée en faillite. Le nombre de faillites est endogène et dépend de la structure du réseau. On distinguera deux éléments au sein de la topologie dont les effets sont distincts. D'une part, il faut considérer la longueur des chemins liant les banques les unes aux autres le long des arcs sortants (c'est l'objet de la proposition 4 qui suit). D'autre part, il faut considérer le voisinage de chaque banque mesuré par le nombre de liens entretenus par chaque banque avec ses partenaires de crédit. A partir de cette distinction on pourra dégager

deux effets qui vont en sens contraire, l'un ayant tendance à limiter l'ampleur de la contagion à court terme, l'autre l'accroissant au contraire.

**Proposition 4** *Le nombre de banques insolubles contraintes à la faillite est une fonction décroissante de la longueur des chemins de contagion potentielle  $o(\cdot)$ .*

(Voir démonstration en annexe 4.4.5)

Si la contagion dépend positivement de la connectivité du système, dans la mesure où une connectivité élevée conduit à une dissémination étendue et rapide de l'événement systémique, l'ampleur de la crise dépend, elle, de la longueur des chemins de contagion en cause dans le système. Plus le chemin de contagion potentielle est long, plus le nombre de banques en faillite, une fois la dissémination terminée, est réduit. En effet, la longueur des chemins permet aux banques faisant face à une demande de remboursement anticipée de bénéficier d'un cumul progressif des actifs courts disponibles de banque à banque, ainsi que de la valeur de liquidation des actifs longs dont une banque créditrice prend possession sur ses débiteurs au moment de leur faillite. La prise en compte de la longueur des chemins est donc une donnée de réseau essentielle à prendre en compte pour la mesure de l'ampleur d'une crise interbancaire. Il semble qu'à la lumière de ce résultat, plus les réseaux sont " ramassés " au sens où les chemins créditeurs les liant mesurés en nombre de liens est faible, plus les réseaux sont fragiles en cas de crise, au sens où ils exhibent un nombre d'institutions en faillite élevé.

Si la longueur des chemins joue un rôle essentiel, l'ampleur de la crise dépend également de la taille des voisinages créditeurs et débiteurs de chaque banque, comme nous le voyons dans la proposition 5.

**Proposition 5** *La valeur des paiements interbancaires en cas d'événement systémique est une fonction croissante du niveau des actifs de court terme, de la valeur de liquidation des actifs et du niveau des passifs nominaux.*

(Voir démonstration en annexe 4.4.6).



La crise est donc freinée dans le réseau par trois éléments : le montant de liquidité présent au sein du bilan de chaque banque, la valeur de liquidation des actifs de long terme, et la valeur du niveau des actifs interbancaires nominaux. Par conséquent, plus un réseau permet un échange de dettes significatif en niveau entre ses membres, plus les pertes seront au final limitées. Pour une valeur de la dette nominale normalisée à  $l$ , une augmentation du niveau des passifs nominaux passe par un accroissement de la valeur de  $l$ . Ce résultat est contraire à l'un des résultats forts de Allen et Gale (2000). Selon ces derniers, en effet, les structures de réseaux les plus stables sont les structures les plus complètes dans la mesure où le montant des dépôts bilatéraux y est plus faible : à taille de portefeuille donnée le réseau est plus stable si les supports de dépôts sont plus nombreux. Notre résultat doit être mise en relation avec les résultats standard de diversification des portefeuilles en finance. En effet, il ne s'agit pas pour limiter les risques sur un portefeuille de dette de diversifier le portefeuille sur un nombre plus grand de supports d'investissement pour une taille de portefeuille donnée, mais il s'agit d'accroître la taille absolue du portefeuille par un niveau de relations de crédits plus fort. C'est la taille du portefeuille qui varie et son augmentation permet de gagner en stabilité, alors que dans les résultats standard de diversification, la taille de portefeuille est donnée, seul change le nombre de supports aux investissements. Ce résultat peut être rapproché d'une des propositions de Lagunoff et Schreft (2001) dans laquelle ils soulignent que la fragilité est une fonction croissante de la taille de l'économie mesurée par le nombre de projets qui y sont à l'oeuvre. Dans notre modèle, il y a également un effet de taille. Cependant, ce n'est pas le nombre de projets qui est la variable clé, mais, la valeur nominale de chacune des relations de crédits, et contrairement à Lagunoff et Schreft (2001) la croissance de la taille vient accroître la valeur des paiements interbancaires et donc la résistance du réseau dans son ensemble.

En considérant la valeur de  $r$  de  $b$  et de  $l$  données, il est nécessaire de déterminer comment évolue le nombre de banques en faillites et de liens détruits selon la structure

du système de paiement interbancaire. Il s'agit, non comme dans le cas précédent, de voir l'évolution des paiements en fonction du niveau de la dette bilatérale, mais de voir l'évolution des paiements (et par suite des faillites) en fonction du nombre des liens bilatéraux (i.e. de la taille des voisinages, ou de la centralité des arcs entrants et sortants).

**Proposition 6** *La valeur des paiements reçus est une fonction décroissante  $vd_{in}(\cdot)$  (la taille des voisinages entrants) et de  $vd_{out}(\cdot)$  (taille des voisinages sortants).*

(voir démonstration en annexe 4.4.7)

En d'autres termes, une centralité élevée du réseau est un facteur aggravant tant de la contagion à court terme, que de la crise. Elle implique, en effet, une plus grande dissémination de l'événement systémique initial, réduit la valeur unitaire des paiements et conduit à une aggravation de la crise mesurée en nombre d'institutions défaillantes. On obtient donc un résultat liant clairement la structure du réseau et l'ampleur de la crise. Plus la centralité en valeur des arcs sortants et entrants est élevée, plus la crise est étendue dans la mesure où elle conduit à accroître le nombre d'institutions touchées par la crise, et à diluer les paiements interbancaires entre un nombre plus élevé de participants lors du dénouement des paiements une fois le processus de contamination achevé. Plus la connectivité d'ordre un du réseau est élevée, plus le réseau est fragile. Ce résultat va plus loin que celui mis en avant par Mueller (2003). L'auteur met en effet en avant que le degré de centralité élevé d'une banque atteinte par un événement systémique accroît la profondeur de la crise. Néanmoins, le résultat reste au niveau de l'intuition, et ne concerne que la banque touchée de manière initiale par l'événement systémique. Ici, on prouve qu'un degré de centralité élevé du réseau est un facteur aggravant de la crise quelle que soit la banque touchée de manière initiale par l'événement systémique. Il existe donc une externalité négative issue des liens des partenaires indirects d'une banque qui joue comme un facteur alourdissant des pertes enregistrées par chacune des banques. Dès lors, pour une valeur de dette donnée, l'augmentation

de la centralité des liens qui peut être vue comme une mesure de diversification va à l'encontre de la stabilité générale du système.

Contrairement à Freixas, Parigi, Rochet (2000), on voit donc que les réseaux diversifiés ont pour propriété d'étendre les crises et non de les limiter. Leur résultat montre que les réseaux les plus denses ont pour propriété "d'absorber" les pertes d'une banque en faillite, et donc de réduire la discipline de marché par laquelle les banques en difficulté doivent être contraintes de fermer leurs portes. On peut considérer que dans notre modèle, la discipline de marché est absolue quand on considère le voisinage de chaque banque. En effet, dans le cas des réseaux les plus diversifiés, les échanges de dettes entre les intervenants sont plus importants et pèsent plus lourd quantitativement dans les bilans bancaires. En revanche, la discipline de marché se trouve affaiblie le long des chemins de contagion potentielle. On peut donc dire qu'en l'espèce, ce n'est pas tant le nombre de liens de chaque banque qui est en cause, comme tend à le souligner l'article de Freixas et alii (2000), que la longueur des chemins liant les différents intervenants.

A partir de ces résultats généraux sur la structure du réseau, il est alors possible de tirer des conclusions sur le degré de fragilité financière dans des réseaux quelconques. En particulier, dans les réseaux en étoiles interconnectées, certains noeuds ont une centralité élevée car ils jouent le rôle de pôle distribuant, ou collectant la liquidité. Ces réseaux sont ceux que Freixas et alii (2000) désigne sous le terme de "centres monétaires". Selon nos résultats, leur degré de centralité élevé les soumet à un risque de crise profonde. C'est d'ailleurs ce que notent Degryse et Ngyen (2004) à partir d'un exemple comparant une structure complète et une structure de "centre monétaire" dans lesquelles le niveau des expositions bilatérales est inchangé.

On peut, à l'aune de ce résultat, donner une explication pertinente à la propagation de la crise bancaire en Asie du Sud Est lors de la crise de 1997 - 1998. Les banques se trouvaient fortement liées les unes aux autres par des pyramides de dettes inter-bancaires comme le soulignent Corsetti et alii (1998). Cette situation a été facilitée

de manière institutionnelle par des marchés d'échanges de dettes comme le Bangkok International Banking Facilities. La faillite initiale d'une banque (Bank One en Thaïlande) a donc pu se propager rapidement entre les intervenants selon le mécanisme ici décrit. Cette contagion des demandes de remboursement anticipée a débouché sur une liquidation anticipée des actifs interbancaires de large ampleur, qui s'est soldée par la fermeture d'un grand nombre d'institutions. Si la similarité des risques a certainement joué un rôle, l'effet de contagion en raison de la structure des liens interbancaires est responsable, en partie au moins, des faillites en chaîne constatées.

## Conclusion

La structure du réseau interbancaire liant les intervenants est clairement non neutre sur deux éléments constitutifs de la notion de fragilité financière : la contagion, entendue comme la propagation de l'illiquidité à partir de l'événement systémique isolé au long du réseau et la crise, issue de l'insolvabilité et mesurée par nombre de banques conduites à la faillite suite au cycle de contagion. Cette distinction est possible du fait d'un mode d'analyse utilisé qui repose sur une approche dynamique à trois périodes. Il apparaît ainsi nettement que la contagion, comme la crise, voient leur ampleur croître avec la connectivité du réseau. En revanche, par la longueur des chemins liant les intervenants, le réseau est en mesure de jouer un rôle " d'amortisseur " de la crise, et de réduire la vitesse de la contagion. Partant, selon les configurations typiques de chaque réseau, il est possible d'établir un classement des réseaux des plus aux moins fragiles. La prise en compte des effets de structure du réseau vient dès lors affaiblir la portée de résultats de théorie financière pourtant établis, comme les effets de la diversification, traditionnellement vue comme un moyen de réduire les risques. La globalisation financière qui se traduit par une interconnexion de plus en plus profonde de réseaux autrefois séparés s'accompagne donc, selon les lignes de notre modèle, d'une fragilisation croissante du système financier.

## 4.4 Annexes

### 4.4.1 Démonstration de l'existence d'un vecteur de paiement de faillite à court terme

$F$  est la composition des fonctions  $g$  et  $h$  telles que

$$g : p \rightarrow b + rk + \Pi^T p$$

$$h : p \rightarrow \min[p, \bar{p}]$$

La fonction  $g$  est une fonction affine, positive, monotone, croissante et la fonction  $h$  est positive, croissante, concave. Par suite,  $F$  est une fonction positive, monotone croissante, et, concave.

De plus  $F$  est bornée.

Soit  $PF(F)$  l'ensemble des points fixes de  $F$ .  $F$  étant croissante positive de  $[0, \bar{p}]$  dans  $[0, \bar{p}]$  et bornée on a :

$$F(0) \geq 0 \text{ et } F(\bar{p}) \leq \bar{p}$$

Dès lors par le théorème du point fixe de Tarski<sup>9</sup> on sait que  $PF(F)$  est non vide et possède un plus grand et un plus petit élément (respectivement  $p^+$  et  $p^-$ ).

### 4.4.2 Démonstration de l'unicité du vecteur de paiement de faillite à court terme

De la démonstration sur l'existence, on sait qu'il existe un plus grand et un plus petit vecteur de paiement de faillite. On a

$$p^+ \geq p^-$$

Supposons que les deux vecteurs soient différents

$$p^+ \neq p^-$$

---

<sup>9</sup>Le théorème du point fixe de Tarski est le suivant : Si  $T$  est un treillis complet et  $N$  une application croissante ou décroissante de  $T$  dans lui-même, alors l'ensemble des points fixes de  $N$  dans  $T$  est lui-même un treillis complet ; en particulier  $N$  a un plus petit et un plus grand élément.

Pour prouver que  $p^+ = p^-$  on a besoin de deux résultats techniques : l'un sur la valeur de la consommation des déposants courts, l'autre sur le niveau de surplus dans le système (voir définition 11). Ces résultats sont obtenus dans les deux sous sections suivantes.

S'appuyant sur ces notions, on sait que la valeur de la consommation disponible pour les déposants est la même quel que soit le vecteur de paiement. Si  $C_1^+(j)$  est la valeur de la consommation retirée par les consommateurs précoces de la banque  $j$  sous le vecteur de paiement  $p^+$ , et  $C_1^-(j)$  est la valeur de la consommation retirée par les consommateurs tardifs de la banque  $j$  sous le vecteur de paiements  $p^-$ . Alors

$$C_1^+(j) = C_1^-(j)$$

Par la règle de priorité absolue des créanciers bancaires sur les déposants à la période  $t = 1$ , les banques pour lesquelles la consommation des déposants en cas de faillite est non nulle sont en mesure de régler le montant de leur dette nominale, soit  $p_j^+ = p_j^- = \bar{p}_j$ .

### Niveau de consommation pour tous les vecteurs de paiements

Soient  $C_1^+(j)$  la valeur de la consommation retirée par les consommateurs de la banque  $j$  sous le vecteur de paiement  $p^+$ , et  $C_1^-(j)$  la valeur de la consommation retirée par les consommateurs de la banque  $j$  sous le vecteur de paiement  $p^-$ . Montrons que ces valeurs sont identiques.

En l'absence d'évènement systémique, on sait que la consommation est identique dans toutes les régions sous l'hypothèse  $(1 + \rho) = R^*$ . En cas de liquidation généralisée, la consommation pour les consommateurs précoces est égale au montant disponible après remboursement de toutes les dettes

$$\begin{aligned} C_1^+(j) &= \text{Max} [\Pi^T(p^+) + b + rk - \bar{p}; 0] \\ C_1^-(j) &= \text{Max} [\Pi^T(p^-) + b + rk - \bar{p}; 0] \end{aligned}$$

$p^+$  et  $p^-$  sont des vecteurs de paiements donc on a

$$\begin{aligned} \text{Max} [\Pi^T(p^+) + b + rk - \bar{p}; 0] &= \Pi^T(p^+) + b + rk - p^+ \\ \text{Max} [\Pi^T(p^-) + b + rk - \bar{p}; 0] &= \Pi^T(p^-) + b + rk - p^- \end{aligned}$$

Dès lors si

$$C_1^+(j) \neq C_1^-(j)$$

on a

$$\Pi^T(p^+) + b + rk - p^+ \neq \Pi^T(p^-) + b + rk - p^-$$

Notons que  $\Pi 1 = 1$  ce qui implique

$$1.(\Pi^T(p^+) - p^+) = 1.(\Pi^T(p^-) - p^-) = 0$$

D'où

$$1.(\Pi^T(p^+) + b + rk - p^+) = 1.(\Pi^T(p^-) + b + rk - p^-)$$

ce qui est contraire à

$$\Pi^T(p^+) + b + rk - p^+ \neq \Pi^T(p^-) + b + rk - p^-$$

d'où

$$\forall j, C_1^+(j) = C_1^-(j)$$

La valeur de la consommation obtenue par les déposants de la banque  $j$  en  $t = 1$  est la même quel que soit le vecteur de paiement.

Pour prouver la proposition 1, on a besoin d'avoir recours à une définition technique sur la notion de réseau de surplus.

### Réseau de surplus

**Définition 11** *Le réseau des banques est un réseau de surplus défini comme suit. Le réseau de banques en  $t = 1$  est un réseau à une composante ; aucune banque n'a d'obligation en dehors du réseau ; l'ensemble des banques dispose d'une valeur positive à partager en  $t = 1$ .*

Cette valeur positive provient de la présence d'actifs courts et d'une valeur de liquidation anticipée des actifs longs positive. Cette valeur est égale à  $b + rk_i \forall i$ . On a donc

$$\sum_{i \in V_n} b + rk_i > 0 \quad (4.41)$$

Montrons que si  $p^*$  est un vecteur de paiement en  $t = 1$ , il existe au moins une banque dans le réseau pour laquelle la consommation des déposants est non nulle.

Le paiement de la banque  $i$  en faillite à ses créancières est

$$p_i = \sum_{j \in V_n} \Pi_{ij}^T p_j + b + rk_i \quad (4.42)$$

En sommant sur  $i$  on a

$$\sum_{i \in V_n} p_i = \sum_{i \in V_n} \sum_{j \in V_n} \Pi_{ij}^T p_j + \sum_{i \in V_n} b + rk_i \quad (4.43)$$

or  $\forall i; \sum_{j \in V_n} \Pi_{ij} = 1$  ou en notation matricielle  $\Pi 1 = 1$ . D'où l'équation précédente s'écrit

$$\sum_{i \in V_n} p_i = \sum_{j \in V_n} p_j + \sum_{i \in V_n} b + rk_i \quad (4.44)$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{i \in V_n} b + rk_i = 0 \quad (4.45)$$

ce qui est contraire au fait que le réseau est un réseau de surplus. Donc il n'est pas possible d'obtenir une consommation nulle pour tous les noeuds du réseau. QED.

Si  $p^*$  est un vecteur de paiement sur le chemin de contagion potentielle  $o(i)$ . Ce dernier satisfait  $\sum_{i \in o(i)} b + rk_i > 0$ . Dès lors,  $o(i)$  est un sous-réseau de surplus. Or, il existe au moins une banque dans un réseau de surplus pour laquelle la consommation est positive.

Si tous les chemins de contagion potentielle sont des sous-réseaux de surplus, alors il existe un unique vecteur de paiement en  $t = 1$ .



### 4.4.3 Démonstration de la proposition 2

Afin d'évaluer la fragilité des réseaux en vitesse et en nombre nous allons étudier les structures typiques de manière successive.

Notons de manière liminaire que la probabilité de l'événement systémique que représente la faillite d'un établissement suit une loi uniforme. Dès lors la probabilité que la banque  $i$  soit en faillite en début de période  $t = 1$  est égale à  $\frac{1}{n}$  dans un réseau à  $n$  éléments.

#### Le cas du réseau complet

Soit  $M$  la matrice  $(n \times n)$  décrivant le réseau asymétrique complet à  $n$  banques.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & 1 & . & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

**Prouvons que la contagion à court terme est toujours d'ordre 2** Supposons que la banque  $p \in [1, n]$  est touchée par l'événement systémique.

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$X$ , vecteur décrivant les faillites directes dans le réseau est composé de  $(n - 1)$  lignes de 0, et d'une ligne de 1 au rang  $p$ . En multipliant  $M$  par  $X$  on obtient le vecteur de

contagion de premier ordre où  $X_j = 0$  pour tout  $j < p + 1$ , et  $X_j = 1$  sinon

$$MX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X^{(1)} \quad (4.48)$$

L'ensemble des banques infectées est donnée par

$$Z^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

où  $\forall i \leq (p-1)$ ,  $Z_i^{(1)} = 0$ , et  $Z_i^{(1)} = 1$  sinon. La contagion de second ordre est donnée par

$$MZ^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ i \\ i+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-p \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

On peut alors calculer le vecteur des banques infectées au second ordre  $Z^{(2)}$ , et on a

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} \quad (4.51)$$

Donc dans le cas où la banque  $p \in [1, n]$  est touchée par l'événement systémique, l'ordre de contagion à court terme est 2.

**Déterminons le nombre de banques infectées par la contagion** Si la banque 1 est touchée par l'événement, alors la contagion touche  $(n - 1) = \deg_{out}(1)$  banques à l'ordre 2, c'est-à-dire toutes les banques en dehors de la banque 1, où  $\deg_{out}(i)$  désigne le degré sortant de la banque  $i$ . Si la banque 2 est touchée par l'événement systémique, alors la contagion touche toutes les banques sauf les banques 1 et 2, soit  $(n - 2) = \deg_{out}(2)$  banques. Si l'événement systémique touche la banque  $p$ , alors la contagion touche toutes les banques  $i$  pour  $i \in [i + 1, n]$ . Chacun de ces événements est équiprobable de probabilité  $\frac{1}{n}$ . L'espérance du nombre de banques touchées par la contagion  $\#C$  d'ordre 2 est donc

$$E(\#C) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{n} (n - p) = \frac{n - 1}{2} \quad (4.52)$$

### Le cas du réseau en étoile

La matrice  $M$  de l'étoile créditrice est donnée par (par convention on notera 1 la banque au centre de l'étoile)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & & & & & . \\ 1 & 0 & & & & & . \\ 1 & . & & & & & . \\ . & . & & . & & & . \\ . & 0 & & & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Avec une probabilité  $1/n$ , la banque au centre est touchée par l'événement systémique.

On a donc

$$MX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

et

$$Z^{(1)} = (1) \quad (4.55)$$

Toutes les créances sont liquidées à l'ordre 1. Tous les actifs sont liquidés à court terme en une étape. Le réseau est alors très fragile en vitesse et en nombre. Il n'y a pas de contagion ultérieure.

Avec une probabilité  $1/n$  la banque  $p \neq 1$  est touchée par l'événement systémique. On a donc

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

et

$$MX = (0) \quad (4.57)$$

Il n'y a donc aucune contagion à court terme. Si une banque de la périphérie est en faillite initiale le réseau est résistant à court terme, il n'y a aucune faillite de court terme en dehors de la faillite initiale.

Dans le cas de l'étoile débitrice, la matrice des liens représentant le réseau en étoile avec centre débiteur est égale à la transposée de la matrice précédente  $M^T$ . La contagion à court terme est donc bimodale. Dès lors, si le centre est en faillite initiale, alors il n'y a aucune contagion à court terme, en revanche à long terme toutes les banques créditrices enregistrent une perte. Si une banque de la périphérie est en faillite initiale, la transmission d'ordre un vers le centre est un ordre stable à court terme.

Si le réseau est mixte, c'est-à-dire avec un centre à la fois créiteur et débiteur, la contagion est au plus d'ordre deux, selon la banque touchée.

L'espérance du nombre de banques touchées par la contagion à court terme est

$$E(\#C) = \frac{2n-1}{n} \quad (4.58)$$

dans le cas de l'étoile créditrice, et

$$E(\#C) = \frac{2n-3}{n} \quad (4.59)$$

dans le cas de l'étoile débitrice.

### Le réseau en ligne

La matrice  $M$  décrivant le système est donnée par

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Avec une probabilité uniforme la banque  $i \in [1, n]$  est touchée par l'événement systémique, les demandes de remboursement anticipées se propagent en cascade jusqu'à la banque qui ne dispose d'aucun crédit. Le nombre de banques atteint par la contagion de court terme à partir de la banque  $i$  vaut donc  $(n - i)$ . La contagion est d'ordre  $(n - i)$ . L'espérance du nombre de banques atteintes est donc

$$E(\#C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n - i) = \frac{n - 1}{2} \quad (4.61)$$

#### 4.4.4 Le réseau circulaire

Dans le réseau circulaire la matrice  $M$  ( $n \times n$ ) décrivant le réseau est comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & . & 0 & . & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Supposons que la banque  $i \in [1, n]$  est touchée par l'événement systémique. La propagation

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

En multipliant  $M$  par  $X$  on obtient le vecteur de contagion de premier ordre.

$$M.X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = X^{(1)} \quad (4.64)$$

La banque  $i$  liquide son actif sur la banque  $i + 1$ , ces deux banques sont les seules illiquides à l'issue de la contagion de premier ordre. La transmission de l'illiquidité suit le chemin des arcs sortants jusqu'à toucher la banque  $i - 1$  à l'ordre  $n - 1$ . Cette banque tenter alors de liquider à son tour ses actifs sur la banque  $i$ , déjà en faillite. On atteint donc l'ordre de contagion stable à l'ordre  $n$ , et toutes les  $n$  banques du réseau ont été touchées par la propagation de l'illiquidité.

#### 4.4.5 Démonstration de la proposition 3

L'ampleur de la contagion est une fonction croissante de la connectivité du réseau. Considérons le cas où la banque  $j$  est touchée de manière initiale par l'événement systémique. La propagation de cet événement à l'ordre 1 touche  $\beta_j^{(1)}$  banques. Toutes ces banques touchées par une demande de remboursement anticipé se retournent sur le

marché interbancaire de manière à faire face à la demande de remboursement anticipée qui les a atteint.  $\beta_j^{(1)}$  donne en effet le degré sortant de la banque  $j$ , c'est à dire la taille de son voisinage débiteur. Les  $\beta_j^{(1)}$  banques touchées se retournent contre leur débiteurs pour obtenir le paiement anticipé de leurs actifs interbancaires conformément à l'ordre de liquidation des actifs.  $\beta_j^{(2)}$  donne la taille du voisinage des banques voisines de  $j$ . La somme  $\beta_j^{(1)} + \beta_j^{(2)}$  donne donc la quantité d'actifs interbancaires en cause dans le processus de contagion à l'ordre 2.

Dès que

$$\sum_{i=1}^k \beta_j^{(i)} = |E(g)| \quad (4.65)$$

l'ensemble des liens interbancaires ont été impliqués dans le processus de contagion, et on a atteint l'ordre de contagion stable du réseau en cause,  $k$ . Par suite, plus la connectivité de la banque touchée par l'événement systémique est forte, plus l'ordre de contagion est bas, et plus la contagion en vitesse est rapide. En outre, plus la connectivité du système est élevée plus  $\beta_j^{(1)}$  est élevé  $\forall j$ , et dès lors plus la contagion est étendue. De l'équation (4.65), on peut déduire que plus  $\beta_j^{(i)}$  est élevé, plus on atteint l'ordre de contagion stable à un ordre bas.

#### 4.4.6 Démonstration de la proposition 4

Le graphe retraçant un chemin de contagion potentielle  $o(.)$  correspond à deux cas. Dans le premier cas, le chemin de contagion potentielle correspond à une chaîne de crédit en ligne dans laquelle existe une banque disposant d'une créance et d'aucune dette, et une banque disposant d'une dette mais d'aucune créance. Dans le second cas, toute banque est à la fois créditrice et débitrice, et il est possible de suivre le long des arcs sortants un chemin de taille strictement supérieur à un initié par un arc sortant à partir de la banque  $i_t$  et se terminant par un arc entrant sur cette même banque. Ce cas correspond donc à une boucle. Dans les deux cas le chemin est donné par un enchaînement d'arcs sortants d'une banque créditrice à l'autre le long du réseau.

Dans le premier cas, le long de la chaîne de crédit en ligne, les banques sont numérotées comme suit, la banque disposant d'une créance, mais d'aucune dette, est numérotée  $i_1$ , la banque directement débitrice de la banque  $i_1$  est la banque  $i_2$ , jusqu'à la banque  $i_s$  qui ne dispose d'aucune créance mais seulement d'une dette. Une fois la banque  $i_\chi$  ( $\chi \in 1, s$ ) touchée par l'événement systémique la transmission des demandes de remboursement anticipé suit le chemin de contagion donné par les arcs sortants le long du réseau avec une probabilité 1. Ce chemin est clairement donné par l'enchaînement du système  $MX$ . Le nombre de banques touchées par la contagion à court terme est donc égal à  $s - \chi$ . L'ordre de contagion total du réseau, c'est-à-dire l'ordre auquel il n'y a plus de transmission est égal à  $s - \chi$ . La probabilité de faillite de la banque  $i_s$  est égale à 1 dans la mesure où par hypothèse on a

$$l < b + rk_{i_s}^* \quad (4.66)$$

La valeur des actifs recouverts par la banque  $i_{(s-1)}$  sur  $i_s$  est égale à

$$x_{i_{(s-1)}} = \frac{b + rk_{i_s}^*}{vd_{in}(i_s)} \quad (4.67)$$

De (4.66) on peut déduire que le paiement fait par la banque  $i_s$  à la banque  $i_{(s-1)}$  est insuffisant pour que cette dernière soit solvable.

Le paiement fait par la banque  $i_{(s-1)}$  à ses créanciers vaut par définition

$$p_{i_{s-1}} = \min \left[ b + rk_{i_{s-1}}^* + \sum_{j \in V_n} \Pi_{i_{s-1}j}^T p_j, \bar{p}_{i_{s-1}} \right] \quad (4.68)$$

Sur le chemin, la valeur du paiement encaissé par  $i_{(s-2)}$  est donc

$$x_{i_{(s-2)}} = \frac{p_{i_{s-1}}}{vd_{in}(i_{s-1})} \quad (4.69)$$

Sur la chemin, avec  $z \in [2, \chi]$  la valeur du paiement encaissé par la banque  $i_{(s-z)}$  peut s'écrire



$$x_{i_{(s-z)}} = \frac{p_{i_{s-z-1}}}{vd_{in}(i_{s-z-1})} \quad (4.70)$$

On fait donc face à une suite de fonctions emboîtées, la valeur de  $x_{i_{(s-z)}}$  dépend positivement de  $x_{i_{(s-z-1)}}$  où chacune des valeurs  $x_{i_{(s-z)}}$  est positive par définition.

Or, le chemin de contagion  $o(\cdot)$  est un réseau de surplus (cf. annexe 4.4.2), dès lors la dérivée de  $p_{i_{s-z-1}}$  par rapport à la longueur du chemin est positive, et par suite  $x_{i_{(s-z)}}$  est une fonction croissante de la longueur de  $o(\cdot)$ .

Si l'on accroît la longueur du chemin, l'encaissement touché par chacune des banques est plus élevé. Cet effet provient de l'accumulation au long du chemin à chaque étape de la valeur de liquidation des actifs courts, et de la valeur de liquidation des actifs longs.

On peut dire que la résistance en nombre le long d'un chemin de contagion potentielle dépend des valeurs  $b$  et  $r$ . Plus le réseau est liquide, i.e. plus  $b$  est élevé, plus la contagion en nombre est faible. La résistance en vitesse est elle donnée par l'ordre de contagion. Elle ne dépend que de la localisation dans le réseau de la banque faisant face à l'événement systémique de manière initiale.

Dans le cas de la boucle, l'enchaînement est similaire. La propagation de l'illiquidité suit le chemin des arcs sortants à partir de la banque  $i_\chi$  touchée par l'événement systémique initial, jusqu'à la banque  $i_{\chi-1}$  créditrice de  $i_\chi$ . Or, par hypothèse la banque en faillite initiale ne règle pas ses passifs. Le cycle de crédit est rompu et on se retrouve face au cas d'une ligne de crédit.

#### 4.4.7 Démonstration de la proposition 5

Le vecteur de paiement de panique est donc un point fixe  $p^*$  de la fonction  $F(\cdot; \Pi; \bar{p}; rk, b)$  de  $[0, \bar{p}]$  dans  $[0, \bar{p}]$  définie par

$$F(\cdot; \Pi; \bar{p}; rk, b) \equiv \min [b + rk + \sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j, \bar{p}_i]$$

L'ensemble des points fixes de  $F$  est noté  $\Psi(F)$ . Le vecteur de paiement à court terme est donné par la fonction

$$f : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow [0, \bar{p}] \quad (4.71)$$

$$\bar{p} \rightarrow \Psi(F(., \Pi; \bar{p}; rk, b)) \quad (4.72)$$

Par Milgrom et Roberts (1994) on sait que si  $F$  est croissante en  $\bar{p}$ , alors  $f$  est croissante en  $\bar{p}$ , et  $\bar{p}$  dépend positivement de la valeur nominale de  $l$ . Or  $F$  est la composition de deux fonctions croissantes en chacun de leurs arguments, donc  $F$  est croissante en  $\bar{p}$ , et en  $l$ .

On peut démontrer de même que  $f$  est croissante en  $b$ ,  $r$  et  $k$ .

#### 4.4.8 Démonstration de la proposition 6

Une banque est en faillite si la valeur des encaissements touchés sur le réseau interbancaire ne lui permet pas de faire face à ses passifs interbancaires. Afin de prouver la proposition 6 il est donc nécessaire d'étudier la fonction qui détermine la valeur des encaissements de chaque banque. Cette fonction dépend de la taille des voisinages entrants et sortants. Soit  $V_j$  la valeur des encaissements touchés par la banque  $j$  le long d'un chemin de contagion de taille  $s$ . On a

$$V_j = \sum_{i=j+1}^s \{b + r[1 - b + (vd_{in}(i) - vd_{out}(i))l]\} \prod_{\tau=j+1}^i [vd_{in}(\tau)]^{-1} \quad (4.73)$$

Pour un réseau donné, une localisation de l'événement systémique donné, une valeur de  $b$  et de  $r$  donnée, il faut donc déterminer la variation de  $V_j$  en fonction des variations des voisinages  $vd_{in}(\cdot)$  et  $vd_{out}(\cdot)$ . Pour ce faire il suffit de déterminer la dérivée de  $V_j$  par rapport à  $vd_{in}(\cdot)$  et  $vd_{out}(\cdot)$ .

$$\frac{\partial V_j}{\partial vd_{out}(\cdot)} = -r \sum_{i=j+1}^s \prod_{\tau=j+1}^i [vd_{in}(\tau)]^{-1} < 0 \quad (4.74)$$

La valeur des encaissements reçus par  $j$  est une fonction décroissante de  $vd_{out}(\cdot)$ , c'est-à-dire une fonction décroissante du degré sortant des partenaires débiteurs de  $j$ . Plus les partenaires débiteurs de  $j$  ont un degré sortant élevé, moins la valeur du capital disponible investi par eux est élevée, et donc plus la valeur de  $k_i = 1 - b + (vd_{in}(i) - vd_{out}(i))l$  est faible. La liquidation du capital investi à long terme par la banque  $i$  est donc plus faible, et partant la valeur touchée par  $j$  en est réduite d'autant.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial vd_{in}(\cdot)} &= \sum_{i=j+1}^s rl \prod_{\tau=j+1}^i [vd_{in}(\tau)]^{-1} - \\ &\quad \sum_{i=j+1}^s \{b + r[1 - b + (vd_{in}(i) - vd_{out}(i))l]\} \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\tau=j+1}^{i-1} [vd_{in}(\tau)]^{-1} \cdot (vd_{in}(i))^{-2} \end{aligned} \quad (4.75)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial vd_{in}(i)} &= \sum_{i=j+1}^n \prod_{k=j+1}^{i-1} [vd_{in}(\tau)]^{-1} \cdot vd_{in}(i)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ rl - \frac{b + r[1 - b + (vd_{in}(i) - vd_{out}(i))l]}{vd_{in}(i)} \right\} \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=j+1}^n \prod_{\tau=j+1}^{i-1} [vd_{in}(\tau)]^{-1} \cdot vd_{in}(i)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{-b - r(1 - b) + vd_{out}(i)}{vd_{in}(i)} \right\} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Or

$$k_i + b + vd_{out}(i)l = 1 + vd_{in}(i)l \quad (4.78)$$

D'où

$$\frac{\partial V_j}{\partial vd_{in}(\cdot)} = \sum_{i=j+1}^s \prod_{\tau=j+1}^{i-1} [vd_{in}(\tau)]^{-1} \cdot vd_{in}(i)^{-1} \left\{ \frac{-b - r(k_i - vd_{in}(i))}{vd_{in}(i)} \right\} \quad (4.79)$$

comme  $k_i > vd_{in}(\cdot)$  on a

$$\frac{\partial V_j}{\partial vd_{in}(\cdot)} < 0 \quad (4.80)$$

La valeur des encaissements reçus par  $j$  est une fonction décroissante de  $vd_{in}(\cdot)$ , c'est-à-dire une fonction décroissante du degré entrant des partenaires créditeurs de  $j$ . Notons que ce résultat est conforme à l'intuition si l'on compare les valeurs encaissées avec les paiements de liquidation dans le réseau en ligne avec les paiements de liquidation dans le réseau complet asymétrique à 6 banques. Dans le réseau en ligne la banque créancière récupère l'intégralité de la valeur de liquidation de la banque en faillite qui ne dispose que d'une unique dette, alors que dans le réseau complet asymétrique la banque créancière ne récupère qu'une fraction de la valeur de liquidation de la banque insolvable partagée entre les différents créanciers.



# Conclusion Générale

L'objet de cette thèse est d'apporter des éléments de réponse à une question simple : quelles sont les conséquences de la présence et de la structure des réseaux interbancaires sur la gestion du risque de liquidité et sur la gestion du risque de faillite ? Partant, cette thèse jette un pont entre la théorie de la stabilité du système bancaire et la théorie des réseaux en s'appuyant sur des avancées récentes dans ces domaines. Pour répondre à cette question notre réflexion sépare clairement les deux enjeux (liquidité et faillite). Elle s'organise donc autour de ces deux thématiques et distingue les éléments relatifs à la gestion du risque de liquidité (chapitres 2 et 3) et ceux relatifs à la gestion du risque de faillite issu d'une crise systémique (chapitre 4).

## Résultats

Le chapitre 1 présente une recension de la littérature organisée autour des modèles de fragilités bancaires. Le cadre développé par Diamond et Dybvig (1983) a été enrichi par un nombre considérable de contributions qui ont permis d'expliquer les causes et les conséquences de l'instabilité bancaire. Ce thème est en effet particulièrement important dans la mesure où l'instabilité bancaire a des conséquences qui dépassent de loin le seul cadre du système financier et affecte le bien être social dans son ensemble. La prise en compte des effets liés à la présence de réseaux interbancaires liant les agents apparaît comme une avancée récente qui a encore été peu exploitée. Les contributions se penchant sur cette thématique souffrent d'un certain nombre de limites : elles ne s'intéressent pas vraiment à la gestion du risque de liquidité et se centrent sur la question des faillites, elles ne considèrent qu'un nombre limité de structures ou de régions, la définition de la stabilité à laquelle elles ont recours est limitative, enfin aucune n'est en mesure d'offrir un cadre général pour l'étude de l'échange de la liquidité entre les agents ou un cadre capable de décrire la contagion pas à pas pour en tirer les conséquences sur l'ampleur d'une crise interbancaire. Ces contributions ont amorcé la convergence entre théorie des réseaux et théorie de la stabilité du système bancaire, mais elles ne l'achèvent pas car l'intégration entre ces deux courants est incomplète.

Partant de ces constats, les chapitres suivants tentent de combler certaines de ces lacunes. Ainsi, le chapitre 2 s'appuie sur le résultat de Bhattacharya et Gale (1987) selon lequel la présence d'un réseau interbancaire améliore le bien être des déposants car il permet d'accroître le niveau des investissements et de réduire la taille des actifs liquides. Nous démontrons cependant que ce résultat dépend clairement de la structure du réseau mis en place. Certaines structures, en effet, ne permettent pas de réduire la taille des actifs liquides tout en se protégeant contre le risque de course à la banque. Pour atteindre la situation décrite par Bhattacharya et Gale (1987), nous démontrons que le réseau doit exhiber un certain nombre de caractéristiques topologiques strictes. Ces caractéristiques sont de deux ordres : la première est une caractéristique en terme de distance géodésique entre les agents, la seconde une caractéristique directe en terme de topologie. D'une part, il faut que le réseau soit un réseau de " petit monde " dans lequel la distance entre deux banques quelconques est réduite. D'autre part, la taille des voisinages dans les réseaux symétriques doit dépasser un certain seuil minimal pour décentraliser avec certitude l'allocation Pareto optimale. Dans le cas où les agents supportent un coût de connexion au réseau, nous montrons que l'équilibre obtenu ne peut pas être optimal de fait de l'existence d'externalités de réseau. Le réseau qui permet de maximiser le bien être social n'est en effet pas stable deux à deux au sens de Jackson et Wolinsky (1996) ce qui laisse de la place à l'intervention du régulateur de manière à répartir les coûts dans le système pour améliorer le bien être social. Si certains réseaux sont exclus de la propriété soulignée par Bhattacharya et Gale (1987), il n'en demeure pas moins qu'un grand nombre de structures reste possible.

C'est pourquoi dans un chapitre 3, à partir de simulations sous Gauss, nous tentons de discriminer les différents réseaux plus avant en se dotant de critères précis de mesure de leur efficacité relative. Ces critères sont de deux ordres, le premier renvoie à un critère en terme de résultats, le second à un critère en terme de processus. Le critère de résultats est l'efficacité allocative. Il mesure la capacité du système à présenter un



rythme de décroissance du nombre de banques illiquides élevé. Les critères de processus renvoient au nombre de périodes nécessaires pour atteindre une situation de partage optimal de la liquidité, il s'agit de l'efficacité temporelle, et au nombre de transactions nécessaires pour atteindre ce même résultat, c'est l'efficacité transactionnelle. Selon les critères considérés, le classement des banques des plus efficaces aux moins efficaces est variable. Le réseau en étoile est ainsi le réseau le plus efficace selon le critère temporel, alors que c'est le réseau complet qui possède la meilleure efficacité allocative. Il apparaît néanmoins que quelle que soit la structure choisie, la croissance de la taille des voisinages vient dégrader l'efficacité du réseau. Ainsi, le nombre de banques encore illiquides à l'issue de la première période d'échanges de fonds est une fonction croissante de la taille des voisinages. La taille du réseau, c'est-à-dire le nombre de banques impliquées dans celui-ci, dégrade moins que proportionnellement l'efficacité allocative.

Le propos du chapitre 4 portent, non sur le risque de liquidité, mais sur le risque de faillite. La modélisation adoptée vise à séparer le phénomène de la contagion, vue comme la propagation de l'illiquidité dans le système, du phénomène de la crise qui mesure l'insolvabilité dans le système au travers de la cascade des paiements entre les intervenants. Après avoir démontré l'existence et l'unicité du vecteur de paiement interbancaire en cas de faillite, nous mettons en lumière l'influence de la structure du réseau sur la propagation de l'illiquidité et sur l'ampleur de l'insolvabilité. En intégrant des indicateurs simples issus de la théorie des graphes nous sommes ainsi en mesure de souligner quelles sont les configurations topologiques les plus en mesure d'accélérer la contagion et d'étendre l'ampleur d'une crise.

## Limites et extensions

Les limites principales des modèles présentés tiennent aux comportements des banques et des déposants qui sont particulièrement frustes. Ainsi, dans le modèle de gestion du risque de liquidité, la transmission de la liquidité entre une banque liquide et une banque illiquide se fait sur une base aléatoire. Une telle hypothèse semble forte, et il est

possible qu'une modélisation différente ait une influence sur les résultats théoriques en terme de topologie. Modifier cette hypothèse aurait en outre des conséquences claires sur la programmation sous Gauss effectuée lors du chapitre 3, et sans doute sur les résultats en terme d'efficacité dans les réseaux. Dans le modèle de gestion du risque de faillite et de la transmission systémique, les banques adoptent un comportement " tout ou rien " par lequel elles sont amenées à liquider l'ensemble de leurs créances au cas où elles doivent faire face à une situation d'illiquidité. Ce choix a été dicté par la volonté de rester en mesure de résoudre analytiquement les modèles. Modifier cette hypothèse impose en effet de prendre en compte des probabilités de demande de remboursement anticipé qui sont fonction de la topologie du réseau et des anticipations de paiement des banques qui dépendent également de cette topologie. Néanmoins, cette piste de recherche pour ardue qu'elle soit n'en demeure pas moins riche et à exploiter. Enfin, nous avons considéré dans le chapitre 4 que les déposants ne jouent aucun rôle dans la propagation des fragilités interbancaires. Cette hypothèse prend le contre pied de celle généralement faite dans la littérature qui considère que ce sont exclusivement les déposants qui sont la source de l'instabilité. Il est sans doute nécessaire de prendre en compte ces deux canaux dans un programme de recherche ultérieur.

## Ouverture : quel rôle pour le régulateur en temps de crise ?

Cette thèse est en mesure d'apporter un éclairage nouveau sur l'action des autorités politiques et monétaires lorsqu'elles sont confrontées à un événement systémique. On a pu constater lors des épisodes de crise systémique historiques deux types d'interventions. Les premières peuvent être qualifiées d'interventions myopes dans la mesure où les autorités monétaires mènent une politique d'accroissement massif de la liquidité disponible sur le marché soit par une politique d'open market, soit en baissant fortement les taux courts de manière à faciliter l'emprunt pour les banques. C'est sur ce mode qu'est intervenue la Réserve fédérale américaine lors du krach boursier de 1987, où la dépréciation massive et rapide des actifs boursiers avait entraîné des pertes pour

les banques. Dans les termes de nos modèles ceci peut s'interpréter comme une baisse de la valeur de revente des actifs à la casse  $r$ . Le second type d'intervention est une intervention ciblée par une politique de prêts aux institutions en difficulté. Dans le cas américain, l'exemple typique de ce type d'action a été l'épisode de LTCM lors duquel la Réserve fédérale a consenti des facilités à un ensemble de banques impliquées dans l'événement potentiellement systémique que représentait la faillite du fond. Dans les termes de notre modèle, ce type de politique peut être vu comme une intervention sur certains noeuds du système interbancaire afin de freiner la liquidation anticipée des créances, tout en rétablissant la confiance dans les institutions touchées.

Un des résultats clé du chapitre 4 est que le chemin de contagion peut conduire à la faillite d'une institution localisée de manière lointaine en terme de distance de réseau<sup>10</sup>. Ce cas est en particulier très clair pour les réseaux en ligne, ou comportant des lignes d'arcs sortants qui constituent le chemin de contagion. Cette faillite intervient par pure contagion et non parce que la banque en faillite fait face à des difficultés intrinsèques. En parallèle à l'idée du " trop grand pour faire faillite " (too big to fail), il est alors possible de définir un nouveau concept d'intervention pour les autorités monétaires qui serait un " trop loin pour faire faillite " (too far to fail). Il ne s'agit donc pas pour les autorités monétaires d'intervenir sur la faillite initiale, qui peut être due à une mauvaise gestion de l'établissement en question, mais seulement sur l'établissement en faillite par contagion et ce afin de bloquer les externalités négatives de réseau qui en découlent tant à court qu'à long terme.

La question qui se pose alors pour les autorités monétaires et financières est celle de savoir comment cibler une intervention au sein du réseau de dette interbancaire afin de limiter les effets de contagion. Il est alors nécessaire de déterminer quelle est la banque clé dans la transmission de la contagion afin de concentrer l'intervention de la banque centrale sur cette dernière. La fragilité d'un réseau interbancaire est mesurable par le nombre d'institutions touchées, ainsi que par la vitesse à laquelle un événement

---

<sup>10</sup>La distance de réseau se mesure par le nombre de liens séparants deux noeuds du système.

systémique se propage. Ces différents indicateurs de la contagion ainsi que la mesure de l'ampleur de la crise sont toutes liées aux indices de mesure de la centralité des liens et de la connectivité du réseau. Dès lors, on est en mesure d'apporter une justification à la notion de " too big to fail ", liée à la structure des liens qui dirige la contagion entre les banques. L'intervention des banques centrales doit se concentrer sur les banques dont les indices de centralité sont les plus élevés.

Dès lors, face à une contagion interbancaire, on l'action du régulateur doit être à géométrie variable selon la connectivité des banques touchées. Dans des réseaux à faible connectivité, l'ampleur de la crise sera d'elle même limitée de fait de l'amortissement de l'effet domino que permettent les réserves liquides et la valeur de liquidation des actifs des banques. Dans les réseaux denses, en revanche, la contagion est très étendue et l'ampleur de la crise bancaire potentiellement plus grande. Les banques centrales ont donc intérêt à ouvrir des lignes de crédits aux banques qui servent de pivot dans le réseau en raison de leur connectivité élevée. Ces banques pivot servent alors de relais de réseau pour garantir une efficacité plus grande à la politique de la banque centrale. Ce faisant, elles sont en mesure de bloquer la contagion en évitant que ces banques ne liquident de manière anticipée leurs actifs interbancaires.

Une telle analyse ne saurait se détacher de la réalité des topologies des réseaux interbancaires. Un programme de recherche serait ainsi de déterminer les topologies des réseaux interbancaires européens à partir des données de flux entre les banques, puis de simuler au sein de ces réseaux une crise afin d'identifier les acteurs clés et d'être en mesure d'élaborer de réelles recommandations de politique économique.



## Programmes sous Gauss

## 4.5 Réseau circulaire

```
new;

cls;

/* Monte Carlo CIRCLE network setup, n=2p bank case, WITH COMPENSA-
TION CHAMBER*/

output file = d :\utilisateur\USERS\svl\circle_out.txt reset;

screen off;

sim=10000;

format /rd 4,1;

dt1=timedt;

n=500;

M=zeros(n,n);

i=1; do until i>rows(M);

if i==1; m[i,2]=1; m[i,n]=1;

elseif i==n; m[i,1]=1; m[i,n-1]=1;

else; m[i,i-1]=1; m[i,i+1]=1;

endif;

i=i+1; endo;

MC1=zeros(sim,1);

MC2=zeros(sim,8);

MC3=zeros(sim,8);

/* Liquidity Shock Values */

let lambdal=0.2;

let lambdah=0.8;

/*starting Monte Carlo*/

q=1; do until q>sim;

format /rd 4,2;

/* Liquidity shock distribution, the 50% case */
```



```

regshocks=zeros(n,1);
z=ones(2,1);
p=(1/2)*z;
let nlambdal=0; /* will be used to count the number of low liquidity shocks */
let nlambdah=0; /* will be used to count the number of high liquidity shocks */
i=1; do until i>n;
theta1=randmn(1,1,p);
if i>(n/2) and nlambdal==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdah;
elseif i>(n/2) and nlambdah==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdal;
elseif theta1==1;
regshocks[i,1]=lambdal; nlambdal=nlambdal+1;
else; regshocks[i,1]=lambdah; nlambdah=nlambdah+1;
endif;
i=i+1;
endo;
/*
"-----";
"Regional Shocks";
"-----";
regshocks;
*/
format /rd 4,0;
/* Initial Bank Positions */
bp=zeros(n,1);
i=1; do until i>n;

```

```

if regshocks[i,1]>lambdal; bp[i,1]=-1;
else; bp[i,1]= 1;
endif;
i=i+1;
endo;

/*
"_____";
"Initial Bank Positions";
"_____";

;
bp;
*/

/* Identifying Liquid and Illiquid Banks*/
bpsubs=bp;
illbanks=0;
liqbanks=0;
i=1; do until bpsubs==0;
z1=indnv(1,bpsubs);
z2=indnv(-1, bpsubs);
if liqbanks==0; liqbanks=z1;
else; liqbanks=liqbanks|z1;
endif;
if illbanks==0; illbanks=z2;
else; illbanks=illbanks|z2;
endif;
bpsubs[z1]=0;
bpsubs[z2]=0;

```

```

i=i+1; endo;

/*
"Illiquid Banks are ";; illbanks;
"Liquid Banks are ";; liqbanks;
*/

equilbanks={};
nill=partnerbanks(M,bp);
k=1; do while nill>0;

/*
"_____";
"Period";;k;
"_____";

*/

/*
"equilibrated banks";; equilbanks;

*/

deltabp=zeros(n,1); /* vector of current period payments*/
/* Number of total exchanes in period k*/
e=0;
/* Payments*/
l1=1; do until l1>rows(liqbanks);
/* count illiquid partners plus illiquid partnersrs of balanced partners*/
payee=0;
l2=1; do until l2>rows(illbanks);
/*check if they are partners*/
if M[liqbanks[l1],illbanks[l2]]==1;
if payee==0; payee=illbanks[l2];

```

```

else ;
/*vertical concatenation */
payee=payee|illbanks[l2] ;
endif ;
else ;
/*check if there is (at least) one equilibrated link between the 2*/
l21=1 ; m1=0 ; do while l21<=rows(equilbanks) and m1<1 ;
if M[illbanks[l2],equilbanks[l21]]==1 and
M[liqbanks[l1],equilbanks[l21]]==1 ;
m1=1 ; /* count this bank as a (potential) receipient of funds and
STOP (m1=1) */
if payee==0 ; payee=illbanks[l2] ;
else ; payee=payee|illbanks[l2] ; /*vertical concatenation */
endif ;
else ; endif ;
l21=l21+1 ; endo ;
endif ;
l2=l2+1 ; endo ;
/* Number of potential reciepients*/
illneighb=rows(payee) ;
/*"ILL partners=" ; illneighb ; */
if payee/=0 ;
/*probability that an illiquid bank gets funds*/
pfunds=(bp[liqbanks[l1]]/illneighb) ;
/* PAYMENTS */
/*if pfunds>=1, ALL the illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/

```

```

if pfunds>=1 ;
bankspaid=payee ;
else ;
/*if pfunds<1, ONLY SOME illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/
/*sample bp[liqbanks[l1]] banks from the payee vector */
bankspaid= sample(payee, bp[liqbanks[l1]]);
/*"banks paid" ; ; bankspaid ;*/
endif ;
l3=1 ; do until l3>rows(bankspaid) ;
deltabp[bankspaid[l3]]=deltabp[bankspaid[l3]]+1 ;
l3=l3+1 ;
endo ;
deltabp[liqbanks[l1]]=deltabp[liqbanks[l1]]-rows(bankspaid) ;
/*Number of payments made*/
e=e+rows(bankspaid) ;
else ;endif ;
l1=l1+1 ; endo ;
bp=bp+deltabp ;
/* Updating Banks Status*/
equilbanks1=selif(liqbanks, bp[liqbanks[.,1]] .eq 0) ;
equilbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[.,1]] .eq 0) ;
equilbanks=equilbanks|equilbanks1|equilbanks2 ;
equilbanks=delif(equilbanks, equilbanks[.,1].==miss(0,0)) ;
equilbanks=sortc(equilbanks,1) ;
liqbanks1=delif(liqbanks, bp[liqbanks[.,1]] .eq 0) ;
liqbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[.,1]].> 0) ;

```

```

liqbanks=liqbanks1|liqbanks2;
liqbanks=delif(liqbanks, liqbanks[:,1].==miss(0,0));
liqbanks=sortc(liqbanks,1);
illbanks=delif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].>=0);
nill=partnerbanks(M,bp);

/*
"Number of payments made=";;e;
"Number of Illiquid Banks with Liquid Partners=";; nill;
*/
MC2[q,k]= nillbanks(bp);
MC3[q,k]= e;
k=k+1; endo;
MC1[q,1]=k-1;
q=q+1; endo;
MC=MC1~MC2~MC3;
MC;

/*ending Monte Carlo*/
output off;
screen on;
dt2=timedt;
dt=dt2-dt1;
dt;

/* Counting the Number of Illiquid Banks with Liquid Partners or with Balanced
Partners who have Liquid Partners*/
proc partnerbanks(M,bp);
local k1,k2,k3,k4,n1;
n1=0;

```

```

k1=1; do while k1<=rows(bp);
if bp[k1]==-1;
/*k3 insures that having only one liquid partner or only one balanced partner with
liquid partners is enough */
/* first scan for direct liquid partners*/
k2=1; k3=0;
do while k2<=rows(M) and k3<1;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]>=1; k3=1; n1=n1+1;
else;
endif;
k2=k2 + 1;
endo;
/* if k3=0 scan for indirect liquid partners*/
if k3==0;
k2=1;
do while k2<=rows(M) and k3<1;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]==0;
k4=1; do while k4<=rows(M) and k3<1;
if M[k2,k4]==1 and bp[k4]>=1; k3=1; n1=n1+1;
else; endif;
k4=k4+1; endo;
else; endif;
k2=k2 + 1;
endo;
else; endif;
else; endif;
k1=k1+1;

```

```
endo;
retp(n1);
endp;
/* Counting the Number of Illiquid Banks*/
proc nillbanks(bp);
local k1,n1;
n1=0;
k1=1; do while k1<=rows(bp);
if bp[k1]==-1;
n1=n1+1;
else; endif;
k1=k1+1;
endo;
retp(n1);
endp;
/* Multinomial Distribution Procedure*/
proc randmn(r,c,p);
local s, t, x;
p = vec(p);
s = cumsumc(p);
t = s[rows(p)];
if t /= 1;
errorlog("RANDMN : Note multinomial probabilities do not sum to 1.");
endif;
if t >= 1;
s = trimr(s,0,1);
endif;
```



```

x = rndu(1,r*c);
x = sumc(x .> s);
x = reshape((x+1),r,c);
retp(x);
endp;

/***** SAMPLE FROM VECTOR *****/
/* by Anton I. Granik & S. Vivier- Lirimont
** Format : y = sample(x,n);
**
** Input : x K by 1 vector to be sampled from
** n integer : the sample size
** Output : y resulting sample of DISTINCT elements of x
*/
proc sample(x,n);
local y,j,prob,e,userows;
y={};
j=1; do until j>n;
e=ones(rows(x),1);
prob=(1/rows(x))*ones(rows(x),1);
userows=1+sumc(rndu(1,1).>cumsumc(prob));
e[userows]=0;
if j==1; y=x[userows];
else; y=y|x[userows];
endif;
x=selif(x,e);
j=j+1; endo;
retp(y);

```

```
endp;
```

```
end;
```

## 4.6 Réseau complet

```
new;

cls;

/* Monte Carlo COMPLETE network setup, n=2p bank case, WITH COMPEN-
SATION CHAMBER*/

output file = d :\utilisateur\USERS\svl\complete_out.txt reset;

screen off;

sim=10000;

format /rd 4,1;

dt1=timedt;

n=500;

M=zeros(n,n);

i=1; do until i>rows(M);
j=1; do until j>rows(M);
if j/=i; m[i,j]=1;
else; endif;
j=j+1; endo;
i=i+1; endo;

MC1=zeros(sim,1);
MC2=zeros(sim,8);
MC3=zeros(sim,8);

/* Liquidity Shock Values */

let lambdal=0.2;
let lambdah=0.8;

/*starting Monte Carlo*/

q=1; do until q>sim;

format /rd 4,2;

/* Liquidity shock distribution, the 50% case */
```

```

regshocks=zeros(n,1);
z=ones(2,1);
p=(1/2)*z;
let nlambdal=0; /* will be used to count the number of low liquidity shocks */
let nlambdah=0; /* will be used to count the number of high liquidity shocks */
i=1; do until i>n;
theta1=randmn(1,1,p);
if i>(n/2) and nlambdal==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdah;
elseif i>(n/2) and nlambdah==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdal;
elseif theta1==1;
regshocks[i,1]=lambdal; nlambdal=nlambdal+1;
else; regshocks[i,1]=lambdah; nlambdah=nlambdah+1;
endif;
i=i+1;
endo;
/*
"-----";
"Regional Shocks";
"-----";
regshocks;
*/
format /rd 4,0;
/* Initial Bank Positions */
bp=zeros(n,1);
i=1; do until i>n;

```

```

if regshocks[i,1]>lambdal; bp[i,1]=-1;
else; bp[i,1]= 1;
endif;
i=i+1;
endo;

/*
"_____";
"Initial Bank Positions";
"_____";

;
bp;
*/

/* Identifying Liquid and Illiquid Banks*/
bpsubs=bp;
illbanks=0;
liqbanks=0;
i=1; do until bpsubs==0;
z1=indnv(1,bpsubs);
z2=indnv(-1, bpsubs);
if liqbanks==0; liqbanks=z1;
else; liqbanks=liqbanks|z1;
endif;
if illbanks==0; illbanks=z2;
else; illbanks=illbanks|z2;
endif;
bpsubs[z1]=0;
bpsubs[z2]=0;

```

```

i=i+1; endo;

/*
"Illiquid Banks are ";; illbanks;
"Liquid Banks are ";; liqbanks;
*/

equilbanks={};
nill=partnerbanks(M,bp);
k=1; do while nill>0;

/*
"_____";
"Period";;k;
"_____";

*/

/*
"equilibrated banks";; equilbanks;

*/

deltabp=zeros(n,1); /* vector of current period payments*/
/* Number of total exchanes in period k*/
e=0;
/* Payments*/
l1=1; do until l1>rows(liqbanks);
/* count illiquid partners plus illiquid partnersrs of balanced partners*/
payee=0;
l2=1; do until l2>rows(illbanks);
/*check if they are partners*/
if M[liqbanks[l1],illbanks[l2]]==1;
if payee==0; payee=illbanks[l2];

```

```

else ;
/*vertical concatenation */
payee=payee|illbanks[l2] ;
endif ;
else ;
/*check if there is (at least) one equilibrated link between the 2*/
l21=1 ; m1=0 ; do while l21<=rows(equilbanks) and m1<1 ;
if M[illbanks[l2],equilbanks[l21]]==1 and
M[liqbanks[l1],equilbanks[l21]]==1 ;
m1=1 ; /* count this bank as a (potential) receipient of funds and
STOP (m1=1) */
if payee==0 ; payee=illbanks[l2] ;
else ; payee=payee|illbanks[l2] ; /*vertical concatenation */
endif ;
else ; endif ;
l21=l21+1 ; endo ;
endif ;
l2=l2+1 ; endo ;
/* Number of potential reciepients*/
illneighb=rows(payee) ;
/*"ILL partners=" ; illneighb ; */
if payee/=0 ;
/*probability that an illiquid bank gets funds*/
pfunds=(bp[liqbanks[l1]]/illneighb) ;
/* PAYMENTS */
/*if pfunds>=1, ALL the illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/

```



```

if pfunds>=1 ;
bankspaid=payee ;
else ;
/*if pfunds<1, ONLY SOME illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/
/*sample bp[liqbanks[l1]] banks from the payee vector */
bankspaid= sample(payee, bp[liqbanks[l1]]);
/*"banks paid" ; ; bankspaid ;*/
endif ;
l3=1 ; do until l3>rows(bankspaid) ;
deltabp[bankspaid[l3]]=deltabp[bankspaid[l3]]+1 ;
l3=l3+1 ;
endo ;
deltabp[liqbanks[l1]]=deltabp[liqbanks[l1]]-rows(bankspaid) ;
/*Number of payments made*/
e=e+rows(bankspaid) ;
else ;endif ;
l1=l1+1 ; endo ;
bp=bp+deltabp ;
/* Updating Banks Status*/
equilbanks1=selif(liqbanks, bp[liqbanks[.,1]] .eq 0) ;
equilbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[.,1]] .eq 0) ;
equilbanks=equilbanks|equilbanks1|equilbanks2 ;
equilbanks=delif(equilbanks, equilbanks[.,1].==miss(0,0)) ;
equilbanks=sortc(equilbanks,1) ;
liqbanks1=delif(liqbanks, bp[liqbanks[.,1]] .eq 0) ;
liqbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[.,1]].> 0) ;

```

```

liqbanks=liqbanks1|liqbanks2;
liqbanks=delif(liqbanks, liqbanks[:,1].==miss(0,0));
liqbanks=sortc(liqbanks,1);
illbanks=delif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].>=0);
nill=partnerbanks(M,bp);

/*
"Number of payments made=";;e;
"Number of Illiquid Banks with Liquid Partners=";; nill;
*/
MC2[q,k]= nillbanks(bp);
MC3[q,k]= e;
k=k+1; endo;
MC1[q,1]=k-1;
q=q+1; endo;
MC=MC1~MC2~MC3;
MC;

/*ending Monte Carlo*/
output off;
screen on;
dt2=timedt;
dt=dt2-dt1;
dt;

/* Counting the Number of Illiquid Banks with Liquid Partners or with Balanced
Partners who have Liquid Partners*/
proc partnerbanks(M,bp);
local k1,k2,k3,k4,n1;
n1=0;

```

```

k1=1 ; do while k1<=rows(bp) ;
if bp[k1]==-1 ;
/*k3 insures that having only one liquid partner or only one balanced partner with
liquid partners is enough */
/* first scan for direct liquid partners*/
k2=1 ; k3=0 ;
do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
else ;
endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;
/* if k3=0 scan for indirect liquid partners*/
if k3==0 ;
k2=1 ;
do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]==0 ;
k4=1 ; do while k4<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k2,k4]==1 and bp[k4]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
else ; endif ;
k4=k4+1 ; endo ;
else ; endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;
else ; endif ;
else ; endif ;
k1=k1+1 ;

```

```
endo;
retp(n1);
endp;
/* Counting the Number of Illiquid Banks*/
proc nillbanks(bp);
local k1,n1;
n1=0;
k1=1; do while k1<=rows(bp);
if bp[k1]==-1;
n1=n1+1;
else; endif;
k1=k1+1;
endo;
retp(n1);
endp;
/* Multinomial Distribution Procedure*/
proc randmn(r,c,p);
local s, t, x;
p = vec(p);
s = cumsumc(p);
t = s[rows(p)];
if t /= 1;
errorlog("RANDMN : Note multinomial probabilities do not sum to 1.");
endif;
if t >= 1;
s = trimr(s,0,1);
endif;
```

```

x = rndu(1,r*c);
x = sumc(x .> s);
x = reshape((x+1),r,c);
retp(x);
endp;

/***** SAMPLE FROM VECTOR *****/
/* by Anton I. Granik & S. Vivier-Lirimont
** Format : y = sample(x,n);
**
** Input : x K by 1 vector to be sampled from
** n integer : the sample size
** Output : y resulting sample of DISTINCT elements of x
*/
proc sample(x,n);
local y,j,prob,e,userows;
y={};
j=1; do until j>n;
e=ones(rows(x),1);
prob=(1/rows(x))*ones(rows(x),1);
userows=1+sumc(rndu(1,1).>cumsumc(prob));
e[userows]=0;
if j==1; y=x[userows];
else; y=y|x[userows];
endif;
x=selif(x,e);
j=j+1; endo;
retp(y);

```

```
endp;
```

```
end;
```

## 4.7 Réseau en étoile

```

new;

cls;

/* Monte Carlo STAR network setup, n=2p bank case, WITH COMPENSATION
CHAMBER*/

output file = d :\utilisateur\USERS\svl\star_out.txt reset;

screen off;

sim=10000;

format /rd 4,1;

dt1=timedt;

n=500;

M=0~ones(1,n-1)|ones(n-1,1)~zeros(n-1,n-1);

MC1=zeros(sim,1);

MC2=zeros(sim,8);

MC3=zeros(sim,8);

/* Liquidity Shock Values */

let lambdal=0.2;

let lambdah=0.8;

/*starting Monte Carlo*/

q=1; do until q>sim;

format /rd 4,2;

/* Liquidity shock distribution, the 50% case */

regshocks=zeros(n,1);

z=ones(2,1);

p=(1/2)*z;

/*The 1st bank is ALWAYS liquid!!!!*/

let nlambdal=1; /* will be used to count the number of low liquidity shocks */

let nlambdah=0; /* will be used to count the number of high liquidity shocks */

```



```

regshocks[1,1]=lambdal;
i=2; do until i>n;
theta1=randmn(1,1,p);
if i>(n/2) and nlambdal==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdah;
elseif i>(n/2) and nlambdah==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdal;
elseif theta1==1;
regshocks[i,1]=lambdal; nlambdal=nlambdal+1;
else; regshocks[i,1]=lambdah; nlambdah=nlambdah+1;
endif;
i=i+1;
endo;

/*
"_____";
"Regional Shocks";
"_____";

regshocks;

*/

format /rd 4,0;

/* Initial Bank Positions */
bp=zeros(n,1);
i=1; do until i>n;
if regshocks[i,1]>lambdal; bp[i,1]=-1;
else; bp[i,1]= 1;
endif;
i=i+1;

```

```

endo ;

/*
"_____";

"Initial Bank Positions" ;

"_____";

;

bp ;

*/

/* Identifying Liquid and Illiquid Banks*/

bpsubs=bp ;
illbanks=0 ;
liqbanks=0 ;
i=1 ; do until bpsubs==0 ;
z1=indnv(1,bpsubs) ;
z2=indnv(-1, bpsubs) ;
if liqbanks==0 ; liqbanks=z1 ;
else ; liqbanks=liqbanks|z1 ;
endif ;
if illbanks==0 ; illbanks=z2 ;
else ; illbanks=illbanks|z2 ;
endif ;
bpsubs[z1]=0 ;
bpsubs[z2]=0 ;
i=i+1 ; endo ;

/*

"Illiquid Banks are " ; ; illbanks ;

"Liquid Banks are " ; ; liqbanks ;

```

```

*/
equilbanks={};
nill=partnerbanks(M,bp);
k=1; do while nill>0;
/*
"_____";
"Period";k;
"_____";
*/
/*
/*
"equilibrated banks"; equilbanks;
*/
deltabp=zeros(n,1); /* vector of current period payments*/
/* Number of total exchanes in period k*/
e=0;
/* Payments*/
l1=1; do until l1>rows(liqbanks);
/* count illiquid partners plus illiquid partnersrs of balanced partners*/
payee=0;
l2=1; do until l2>rows(illbanks);
/*check if they are partners*/
if M[liqbanks[l1],illbanks[l2]]==1;
if payee==0; payee=illbanks[l2];
else;
/*vertical concatenation */
payee=payee|illbanks[l2];
endif;

```

```

else ;

/*check if there is (at least) one equilibrated link between the 2*/
l21=1 ; m1=0 ; do while l21<=rows(equilbanks) and m1<1 ;
if M[illbanks[l2],equilbanks[l21]]==1 and
M[liqbanks[l1],equilbanks[l21]]==1 ;
m1=1 ; /* count this bank as a (potential) receipient of funds and
STOP (m1=1) */
if payee==0 ; payee=illbanks[l2] ;
else ; payee=payee||illbanks[l2] ; /*vertical concatenation */
endif ;
else ; endif ;
l21=l21+1 ; endo ;
endif ;
l2=l2+1 ; endo ;

/* Number of potential reciepients*/
illneighb=rows(payee) ;

/*"ILL partners=" ; illneighb ;*/
if payee/=0 ;

/*probability that an illiquid bank gets funds*/
pfunds=(bp[liqbanks[l1]]/illneighb) ;

/* PAYMENTS */

/*if pfunds>=1, ALL the illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/
if pfunds>=1 ;
bankspaid=payee ;
else ;

/*if pfunds<1, ONLY SOME illiquid neighbors and quasi-neighbors get

```

```

funds*/
/*sample bp[liqbanks[l1]] banks from the payee vector */
bankspaid= sample(payee, bp[liqbanks[l1]]);
/*"banks paid" ;; bankspaid;*/
endif;
l3=1; do until l3>rows(bankspaid);
deltabp[bankspaid[l3]]=deltabp[bankspaid[l3]]+1;
l3=l3+1;
endo;
deltabp[liqbanks[l1]]=deltabp[liqbanks[l1]]-rows(bankspaid);
/*Number of payments made*/
e=e+rows(bankspaid);
else;endif;
l1=l1+1; endo;
bp=bp+deltabp;
/* Updating Banks Status*/
equilbanks1=selif(liqbanks, bp[liqbanks[:,1]] .eq 0);
equilbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[:,1]] .eq 0);
equilbanks=equilbanks|equilbanks1|equilbanks2;
equilbanks=delif(equilbanks, equilbanks[:,1].==miss(0,0));
equilbanks=sortc(equilbanks,1);
liqbanks1=delif(liqbanks, bp[liqbanks[:,1]] .eq 0);
liqbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].> 0);
liqbanks=liqbanks1|liqbanks2;
liqbanks=delif(liqbanks, liqbanks[:,1].==miss(0,0));
liqbanks=sortc(liqbanks,1);
illbanks=delif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].>=0);

```

```

nill=partnerbanks(M,bp);
/*
"Number of payments made=";;e;
"Number of Illiquid Banks with Liquid Partners=";; nill;
*/
MC2[q,k]= nillbanks(bp);
MC3[q,k]= e;
k=k+1; endo;
MC1[q,1]=k-1;
q=q+1; endo;
MC=MC1~MC2~MC3;
MC;
/*ending Monte Carlo*/
output off;
screen on;
dt2=timedt;
dt=dt2-dt1;
dt;
/* Counting the Number of Illiquid Banks with Liquid Partners or with Balanced
Partners who have Liquid Partners*/
proc partnerbanks(M,bp);
local k1,k2,k3,k4,n1;
n1=0;
k1=1; do while k1<=rows(bp);
if bp[k1]==-1;
/*k3 insures that having only one liquid partner or only one balanced partner with
liquid partners is enough */

```

```

/* first scan for direct liquid partners*/
k2=1 ; k3=0 ;
do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
else ;
endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;

/* if k3=0 scan for indirect liquid partners*/
if k3==0 ;
k2=1 ;
do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]==0 ;
k4=1 ; do while k4<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k2,k4]==1 and bp[k4]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
else ; endif ;
k4=k4+1 ; endo ;
else ; endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;
else ; endif ;
else ; endif ;
k1=k1+1 ;
endo ;
retp(n1) ;
endp ;

/* Counting the Number of Illiquid Banks*/

```

```
proc nillbanks(bp);
local k1,n1;
n1=0;
k1=1; do while k1<=rows(bp);
if bp[k1]==-1;
n1=n1+1;
else; endif;
k1=k1+1;
endo;
retp(n1);
endp;

/* Multinomial Distribution Procedure*/
proc randmn(r,c,p);
local s, t, x;
p = vec(p);
s = cumsumc(p);
t = s[rows(p)];
if t /= 1;
errorlog("RANDMN : Note multinomial probabilities do not sum to 1.");
endif;
if t >= 1;
s = trimr(s,0,1);
endif;
x = rndu(1,r*c);
x = sumc(x .> s);
x = reshape((x+1),r,c);
retp(x);
```



```

endp ;

/***** SAMPLE FROM VECTOR *****/
/* by Anton I. Granik & S. Vivier-Lirimont
** Format : y = sample(x,n);
**
** Input : x K by 1 vector to be sampled from
** n integer : the sample size
** Output : y resulting sample of DISTINCT elements of x
*/
proc sample(x,n) ;
local y,j,prob,e,userows ;
y={} ;
j=1 ; do until j>n ;
e=ones(rows(x),1) ;
prob=(1/rows(x))*ones(rows(x),1) ;
userows=1+sumc(rndu(1,1).>cumsumc(prob)) ;
e[userows]=0 ;
if j==1 ; y=x[userows] ;
else ; y=y|x[userows] ;
endif ;
x=selif(x,e) ;
j=j+1 ; endo ;
retp(y) ;
endp ;
end ;

```

## 4.8 Réseau en étoile contrainte

```

new;

cls;

/* Monte Carlo STAR network setup, n=2p bank case, WITH COMPENSATION
CHAMBER*/

output file = d:\USERS\svl\star_QQe_out_mod100.txt reset;

screen off;

sim=10000;

format /rd 4,1;

outwidth 120;

n=100;

M=0~ones(1,n-1)|ones(n-1,1)~zeros(n-1,n-1);

MC1=zeros(sim,1);

MC2=zeros(sim,8);

MC3=zeros(sim,8);

/* Liquidity Shock Values */

let lambdal=0.2;

let lambdah=0.8;

/*starting Monte Carlo*/

q=1; do until q>sim;

format /rd 4,2;

/* Liquidity shock distribution, the 50% case */

regshocks=zeros(n,1);

z=ones(2,1);

p=(1/2)*z;

/*The 1st bank is NOT ALWAYS liquid!!!!*/

let nlambdal=0; /* will be used to count the number of low liquidity shocks */

let nlambdah=0; /* will be used to count the number of high liquidity shocks */

```

```

i=1 ; do until i>n ;
theta1=randmn(1,1,p) ;
if i>(n/2) and nlambdal==(n/2) ;
regshocks[i,1]=lambdah ;
elseif i>(n/2) and nlambdah==(n/2) ;
regshocks[i,1]=lambdal ;
elseif theta1==1 ;
regshocks[i,1]=lambdal ; nlambdal=nlambdal+1 ;
else ; regshocks[i,1]=lambdah ; nlambdah=nlambdah+1 ;
endif ;
i=i+1 ;
endo ;

/*
"_____";
"Regional Shocks" ;
"_____";

regshocks ;

*/

format /rd 4,0 ;

/* Initial Bank Positions */
bp=zeros(n,1) ;
i=1 ; do until i>n ;
if regshocks[i,1]>lambdal ; bp[i,1]=-1 ;
else ; bp[i,1]= 1 ;
endif ;
i=i+1 ;
endo ;

```

```

/*
"_____";
"Initial Bank Positions";
"_____";

;

bp;

*/

/* Identifying Liquid and Illiquid Banks*/
bpsubs=bp;
illbanks=0;
liqbanks=0;
i=1; do until bpsubs==0;
z1=indnv(1,bpsubs);
z2=indnv(-1, bpsubs);
if liqbanks==0; liqbanks=z1;
else; liqbanks=liqbanks|z1;
endif;
if illbanks==0; illbanks=z2;
else; illbanks=illbanks|z2;
endif;
bpsubs[z1]=0;
bpsubs[z2]=0;
i=i+1; endo;

/*
"Illiquid Banks are ";; illbanks;
"Liquid Banks are ";; liqbanks;

*/

```

```

equilbanks={};
nill=partnerbanks(M,bp);
k=1; do while nill>0;
/*
"_____";
"Period";k;
"_____";
*/
*/
/*
"equilibrated banks"; equilbanks;
*/
deltabp=zeros(n,1); /* vector of current period payments*/
/* Number of total exchanes in period k*/
e=0;
/* Payments*/
l1=1; do until l1>rows(liqbanks);
/* count illiquid partners plus illiquid partnersrs of balanced partners*/
payee=0;
l2=1; do until l2>rows(illbanks);
/*check if they are partners*/
if M[liqbanks[l1],illbanks[l2]]==1;
if payee==0; payee=illbanks[l2];
else;
/*vertical concatenation */
payee=payee|illbanks[l2];
endif;
else;

```

```

/*check if there is (at least) one equilibrated link between the 2*/
l21=1; m1=0; do while l21<=rows(equilbanks) and m1<1;
if M[illbanks[l2],equilbanks[l21]]==1 and M[liqbanks[l1],equilbanks[l21]]==1;
m1=1; /* count this bank as a (potential) receipient of funds and STOP (m1=1)
*/
if payee==0; payee=illbanks[l2];
else; payee=payee|illbanks[l2]; /*vertical concatenation */
endif;
else; endif;
l21=l21+1; endo;
endif;
l2=l2+1; endo;
/* Number of potential reciepients*/
illneighb=rows(payee);
/*"ILL partners="; illneighb;*/
if payee/=0;
/*probability that an illiquid bank gets funds*/
pfunds=(bp[liqbanks[l1]]/illneighb);
/* PAYMENTS */
/*if pfunds>=1, ALL the illiquid neighbors and quasi-neighbors get funds*/
if pfunds>=1;
bankspaid=payee;
else;
/*if pfunds<1, ONLY SOME illiquid neighbors and quasi-neighbors get funds*/
/*sample bp[liqbanks[l1]] banks from the payee vector */
bankspaid= sample(payee, bp[liqbanks[l1]]);
/*"banks paid";; bankspaid;*/

```

```

endif;
l3=1; do until l3>rows(bankspaid);
deltabp[bankspaid[l3]]=deltabp[bankspaid[l3]]+1;
l3=l3+1;
endo;
deltabp[liqbanks[l1]]=deltabp[liqbanks[l1]]-rows(bankspaid);
/*Number of payments made*/
e=e+rows(bankspaid);
else;endif;
l1=l1+1; endo;
bp=bp+deltabp;
/* Updating Banks Status*/
equilbanks1=selif(liqbanks, bp[liqbanks[:,1]] .eq 0);
equilbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[:,1]] .eq 0);
equilbanks=equilbanks|equilbanks1|equilbanks2;
equilbanks=delif(equilbanks, equilbanks[:,1].==miss(0,0));
equilbanks=sortc(equilbanks,1);
liqbanks1=delif(liqbanks, bp[liqbanks[:,1]] .eq 0);
liqbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].> 0);
liqbanks=liqbanks1|liqbanks2;
liqbanks=delif(liqbanks, liqbanks[:,1].==miss(0,0));
liqbanks=sortc(liqbanks,1);
illbanks=delif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].>=0);
nill=partnerbanks(M,bp);
/*
"Number of payments made=";;e;
"Number of Illiquid Banks with Liquid Partners=";; nill;

```



```

*/
MC2[q,k]= nillbanks(bp);
MC3[q,k]= e;
k=k+1; endo;
MC1[q,1]=k-1;
q=q+1; endo;
MC=MC1~MC2~MC3;
MC;
/*ending Monte Carlo*/
output off;
screen on;

/* Counting the Number of Illiquid Banks with Liquid Partners or with Balanced
Partners who have Liquid Partners*/
proc partnerbanks(M,bp);
local k1,k2,k3,k4,n1;
n1=0;
k1=1; do while k1<=rows(bp);
if bp[k1]==-1;

/*k3 insures that having only one liquid partner or only one balanced partner with
liquid partners is enough */
/* first scan for direct liquid partners*/
k2=1; k3=0;
do while k2<=rows(M) and k3<1;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]>=1; k3=1; n1=n1+1;
else;
endif;
k2=k2 + 1;

```

```

    endo ;
    /* if k3=0 scan for indirect liquid partners*/
    if k3==0 ;
    k2=1 ;
    do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
    if M[k1,k2]==1 and bp[k2]==0 ;
    k4=1 ; do while k4<=rows(M) and k3<1 ;
    if M[k2,k4]==1 and bp[k4]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
    else ; endif ;
    k4=k4+1 ; endo ;
    else ; endif ;
    k2=k2 + 1 ;
    endo ;
    else ; endif ;
    else ; endif ;
    k1=k1+1 ;
    endo ;
    retp(n1) ;
    endp ;
    /* Counting the Number of Illiquid Banks*/
    proc nillbanks(bp) ;
    local k1,n1 ;
    n1=0 ;
    k1=1 ; do while k1<=rows(bp) ;
    if bp[k1]==-1 ;
    n1=n1+1 ;
    else ; endif ;

```

```

k1=k1+1;
endo;
retp(n1);
endp;
/* Multinomial Distribution Procedure*/
proc randmn(r,c,p);
local s, t, x;
p = vec(p);
s = cumsumc(p);
t = s[rows(p)];
if t /= 1;
errorlog("RANDMN : Note multinomial probabilities do not sum to 1.");
endif;
if t >= 1;
s = trimr(s,0,1);
endif;
x = rndu(1,r*c);
x = sumc(x .> s);
x = reshape((x+1),r,c);
retp(x);
endp;
/***** SAMPLE FROM VECTOR *****/
/* by Anton I. Granik & S. Vivier-Lirimont
** Format : y = sample(x,n);
**
** Input : x K by 1 vector to be sampled from
** n integer : the sample size

```

```
** Output : y resulting sample of DISTINCT elements of x
*/
proc sample(x,n);
local y,j,prob,e,userows;
y={};
j=1; do until j>n;
e=ones(rows(x),1);
prob=(1/rows(x))*ones(rows(x),1);
userows=1+sumc(rndu(1,1).>cumsumc(prob));
e[userows]=0;
if j==1; y=x[userows];
else; y=y|x[userows];
endif;
x=selif(x,e);
j=j+1; endo;
retp(y);
endp;
end;
```

## 4.9 Réseaux $k$ –réguliers quelconques

```
new;

cls;

/* Monte Carlo K-regular network setup, n=2p bank case, WITH RANDOM LINKS*/
output file = kreg_random_out.txt reset;

screen off;

/* the number of times a random matrix of links is simulated */
sim1=3000;

/* the number of times shocks are simulated (for EACH simulation of a matrix of
links) */
sim2=3000;

sim=sim1*sim2;

format /rd 4,1;

outwidth 120;

/* network size*/
n=50;

kindex=0; do until 1+kindex>30;

links=1+kindex;

MC1=zeros(sim,2);

MC2=zeros(sim,8);

MC3=zeros(sim,8);

/* Liquidity Shock Values */

let lambdal=0.2;

let lambdah=0.8;

/*starting Monte Carlo*/

q1=1; do until q1>sim1;

/* first generate a nxn k-regular matrix of RANDOM links */

M=zeros(n,n);
```

```

format /rd 4,0;

v=0;

/* simple vector of bank indices */
index=indexcat(M[:,1],v);
min=minc(sumc(M));
i=1; do until min==links;
min1=minc(sumc(M[:,i+1:n]));
onesleft=links-sumc(M[:,i]);
if onesleft>0;
e1=sumc(M[:,i+1:n]).==min1;
index1=selif(index[i+1:n,1],e1);
e2=(sumc(M[:,i+1:n]).==links) .or (sumc(M[:,i+1:n]).==min1);
index2=delif(index[i+1:n,1],e2);
if onesleft>=rows(index1);
j=1; do until j>rows(index1);
M[i,index1[j,1]]=1; M[index1[j,1],i]=1;
j=j+1; endo;
if onesleft>rows(index1);
b=sample(index2,onesleft-rows(index1));
j=1; do until j>rows(b);
M[i,b[j,1]]=1; M[b[j,1],i]=1;
j=j+1; endo;
else;
endif;
else;
b=sample(index1,onesleft);
j=1; do until j>rows(b);

```

```

M[i,b[j,1]]=1 ; M[b[j,1],i]=1 ;
j=j+1 ; endo ;
endif ;
else ;
endif ;
min=minc(sumc(M)) ;
i=i+1 ; endo ;
/* next make sim2 simulations of shocks */
q2=1 ; do until q2>sim2 ;
format /rd 4,2 ;
/* Liquidity shock distribution, the 50% case */
regshocks=zeros(n,1) ;
z=ones(2,1) ;
p=(1/2)*z ;
let nlambdal=0 ; /* will be used to count the number of low liquidity shocks */
let nlambdah=0 ; /* will be used to count the number of high liquidity shocks */
i=1 ; do until i>n ;
theta1=randmn(1,1,p) ;
if i>(n/2) and nlambdal==(n/2) ;
regshocks[i,1]=lambdah ;
elseif i>(n/2) and nlambdah==(n/2) ;
regshocks[i,1]=lambdal ;
elseif theta1==1 ;
regshocks[i,1]=lambdal ; nlambdal=nlambdal+1 ;
else ; regshocks[i,1]=lambdah ; nlambdah=nlambdah+1 ;
endif ;
i=i+1 ;

```



```

endo ;

/*
"_____";

"Regional Shocks" ;

"_____";

regshocks ;

*/

format /rd 4,0 ;

/* Initial Bank Positions */

bp=zeros(n,1) ;

i=1 ; do until i>n ;

if regshocks[i,1]>lambdal ; bp[i,1]=-1 ;

else ; bp[i,1]= 1 ;

endif ;

i=i+1 ;

endo ;

/*
"_____";

"Initial Bank Positions" ;

"_____";

;

bp ;

*/

/* Identifying Liquid and Illiquid Banks*/

bpsubs=bp ;

illbanks=0 ;

liqbanks=0 ;

```

```

i=1 ; do until bpsubs==0 ;
z1=indnv(1,bpsubs) ;
z2=indnv(-1, bpsubs) ;
if liqbanks==0 ; liqbanks=z1 ;
else ; liqbanks=liqbanks|z1 ;
endif ;
if illbanks==0 ; illbanks=z2 ;
else ; illbanks=illbanks|z2 ;
endif ;
bpsubs[z1]=0 ;
bpsubs[z2]=0 ;
i=i+1 ; endo ;
/*
"Illiquid Banks are " ; ; illbanks ;
"Liquid Banks are " ; ; liqbanks ;
*/
equilbanks={} ;
nill=partnerbanks(M,bp) ;
k=1 ; do while nill>0 ;
/*
"_____";
"Period" ; ;k ;
"_____";
*/
/*
"equilibrated banks" ; ; equilbanks ;
*/

```

```

deltabp=zeros(n,1); /* vector of current period payments*/
/* Number of total exchanges in period k*/
e=0;
/* Payments*/
l1=1; do until l1>rows(liqbanks);
/* count illiquid partners plus illiquid partners of balanced partners*/
payee=0;
l2=1; do until l2>rows(illbanks);
/*check if they are partners*/
if M[liqbanks[l1],illbanks[l2]]==1;
if payee==0; payee=illbanks[l2];
else;
/*vertical concatenation */
payee=payee|illbanks[l2];
endif;
else;
/*check if there is (at least) one equilibrated link between the 2*/
l21=1; m1=0; do while l21<=rows(equilbanks) and m1<1;
if M[illbanks[l2],equilbanks[l21]]==1 and
M[liqbanks[l1],equilbanks[l21]]==1;
m1=1; /* count this bank as a (potential) receipient of funds and
STOP (m1=1) */
if payee==0; payee=illbanks[l2];
else; payee=payee|illbanks[l2]; /*vertical concatenation */
endif;
else; endif;
l21=l21+1; endo;

```

```

endif;
l2=l2+1; endo;
/* Number of potential recipients*/
illneighb=rows(payee);
/*"ILL partners=";illneighb;*/
if payee/=0;
/*probability that an illiquid bank gets funds*/
pfunds=(bp[liqbanks[l1]]/illneighb);
/* PAYMENTS */
/*if pfunds>=1, ALL the illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/
if pfunds>=1;
bankspaid=payee;
else;
/*if pfunds<1, ONLY SOME illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/
/*sample bp[liqbanks[l1]] banks from the payee vector */
bankspaid= sample(payee, bp[liqbanks[l1]]);
/*"banks paid";; bankspaid;*/
endif;
l3=1; do until l3>rows(bankspaid);
deltabp[bankspaid[l3]]=deltabp[bankspaid[l3]]+1;
l3=l3+1;
endo;
deltabp[liqbanks[l1]]=deltabp[liqbanks[l1]]-rows(bankspaid);
/*Number of payments made*/
e=e+rows(bankspaid);

```

```

else;endif;

l1=l1+1; endo;

bp=bp+deltabp;

/* Updating Banks Status*/

equilbanks1=selif(liqbanks, bp[liqbanks[.,1]] .eq 0);

equilbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[.,1]] .eq 0);

equilbanks=equilbanks|equilbanks1|equilbanks2;

equilbanks=delif(equilbanks, equilbanks[.,1].==miss(0,0));

equilbanks=sortc(equilbanks,1);

liqbanks1=delif(liqbanks, bp[liqbanks[.,1]] .eq 0);

liqbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[.,1]].> 0);

liqbanks=liqbanks1|liqbanks2;

liqbanks=delif(liqbanks, liqbanks[.,1].==miss(0,0));

liqbanks=sortc(liqbanks,1);

illbanks=delif(illbanks, bp[illbanks[.,1]].>=0);

nill=partnerbanks(M,bp);

/*

"Number of payments made=";;e;

"Number of Illiquid Banks with Liquid Partners=";; nill;

*/

MC2[q1*q2,k]= nillbanks(bp);

MC3[q1*q2,k]= e;

k=k+1; endo;

MC1[q1*q2,2]=k-1;

t=nillbanks(bp);

if t==0; MC1[q1*q2,1]=1;

else; MC1[q1*q2,1]=0;

```

```

endif;
q2=q2+1; endo;
q1=q1+1; endo;
MC=MC1~MC2~MC3;
/*ending Monte Carlo*/
/* Creating a BIG matrix of all results*/
if kindex==0; BIGMC=MC;
else; BIGMC=BIGMC|MC;
endif;
kindex=kindex+1;
endo;
BIGMC;
output off;
screen on;
/* Counting the Number of Illiquid Banks with Liquid Partners or with Balanced
Partners who have Liquid Partners*/
proc partnerbanks(M,bp);
local k1,k2,k3,k4,n1;
n1=0;
k1=1; do while k1<=rows(bp);
if bp[k1]==-1;
/*k3 insures that having only one liquid partner or only one balanced partner with
liquid partners is enough */
/* first scan for direct liquid partners*/
k2=1; k3=0;
do while k2<=rows(M) and k3<1;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]>=1; k3=1; n1=n1+1;

```

```

else ;
endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;
/* if k3=0 scan for indirect liquid partners*/
if k3==0 ;
k2=1 ;
do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]==0 ;
k4=1 ; do while k4<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k2,k4]==1 and bp[k4]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
else ; endif ;
k4=k4+1 ; endo ;
else ; endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;
else ; endif ;
else ; endif ;
k1=k1+1 ;
endo ;
retp(n1) ;
endp ;
/* Counting the Number of Illiquid Banks*/
proc nillbanks(bp) ;
local k1,n1 ;
n1=0 ;
k1=1 ; do while k1<=rows(bp) ;

```

```

if bp[k1]==-1;
n1=n1+1;
else; endif;
k1=k1+1; endo;
retp(n1);
endp;

/* Multinomial Distribution Procedure*/

proc randmn(r,c,p);
local s, t, x;
p = vec(p);
s = cumsumc(p);
t = s[rows(p)];
if t /= 1;
errorlog("RANDMN : Note multinomial probabilities do not sum to 1.");
endif;
if t >= 1;
s = trimr(s,0,1);
endif;
x = rndu(1,r*c);
x = sumc(x .> s);
x = reshape((x+1),r,c);
retp(x);
endp;

/***** SAMPLE FROM VECTOR *****/

/* by Anton I. Granik & S. Vivier-Lirimont

** Format : y = sample(x,n);

**

```



```
** Input : x K by 1 vector to be sampled from
** n integer : the sample size
** Output : y resulting sample of DISTINCT elements of x
*/
proc sample(x,n);
local y,j,prob,e,userows;
y={};
j=1; do until j>n;
e=ones(rows(x),1);
prob=(1/rows(x))*ones(rows(x),1);
userows=1+sumc(rndu(1,1).>cumsumc(prob));
e[userows]=0;
if j==1; y=x[userows];
else; y=y|x[userows];
endif;
x=selif(x,e);
j=j+1; endo;
retp(y);
endp;
end;
```

## 4.10 Réseaux $k$ –réguliers particuliers

```

new;

cls;

/* Monte Carlo K-regular network setup, n=2p bank case, WITH COMPENSA-
TION
CHAMBER*/

output file = d:\USERS\svl\kreg_outPROX100.txt reset;

screen off;

sim=10000;

format /rd 4,1;

outwidth 120;

n=100;

kindex=0; do until 50+10*kindex>n;

links=50+10*kindex;

M=kregular(links,n);

MC1=zeros(sim,1);

MC2=zeros(sim,8);

MC3=zeros(sim,8);

/* Liquidity Shock Values */

let lambdal=0.2;

let lambdah=0.8;

/*starting Monte Carlo*/

q=1; do until q>sim;

format /rd 4,2;

/* Liquidity shock distribution, the 50% case */

regshocks=zeros(n,1);

z=ones(2,1);

p=(1/2)*z;

```

```

let nlambdal=0; /* will be used to count the number of low liquidity shocks */
let nlambdah=0; /* will be used to count the number of high liquidity shocks */
i=1; do until i>n;
theta1=randmn(1,1,p);
if i>(n/2) and nlambdal==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdah;
elseif i>(n/2) and nlambdah==(n/2);
regshocks[i,1]=lambdal;
elseif theta1==1;
regshocks[i,1]=lambdal; nlambdal=nlambdal+1;
else; regshocks[i,1]=lambdah; nlambdah=nlambdah+1;
endif;
i=i+1;
endo;

/*
"_____";

"Regional Shocks";

"_____";

regshocks;

*/

format /rd 4,0;

/* Initial Bank Positions */
bp=zeros(n,1);
i=1; do until i>n;
if regshocks[i,1]>lambdal; bp[i,1]=-1;
else; bp[i,1]= 1;
endif;

```

```

i=i+1;
endo;
/*
"_____";
"Initial Bank Positions";
"_____";
;
bp;
*/
/* Identifying Liquid and Illiquid Banks*/
bpsubs=bp;
illbanks=0;
liqbanks=0;
i=1; do until bpsubs==0;
z1=indnv(1,bpsubs);
z2=indnv(-1, bpsubs);
if liqbanks==0; liqbanks=z1;
else; liqbanks=liqbanks|z1;
endif;
if illbanks==0; illbanks=z2;
else; illbanks=illbanks|z2;
endif;
bpsubs[z1]=0;
bpsubs[z2]=0;
i=i+1; endo;
/*
"Illiquid Banks are ";; illbanks;

```

```

"Liquid Banks are " ; ; liqbanks ;
*/
equilbanks={} ;
nill=partnerbanks(M,bp) ;
k=1 ; do while nill>0 ;
/*
"_____-" ;
"Period" ; ;k ;
"_____-" ;
*/
/*
"equilibrated banks" ; ; equilbanks ;
*/
deltabp=zeros(n,1) ; /* vector of current period payments*/
/* Number of total exchanes in period k*/
e=0 ;
/* Payments*/
l1=1 ; do until l1>rows(liqbanks) ;
/* count illiquid partners plus illiquid partnersrs of balanced partners*/
payee=0 ;
l2=1 ; do until l2>rows(illbanks) ;
/*check if they are partners*/
if M[liqbanks[l1],illbanks[l2]]==1 ;
if payee==0 ; payee=illbanks[l2] ;
else ;
/*vertical concatenation */
payee=payee|illbanks[l2] ;

```

```

endif;

else;

/*check if there is (at least) one equilibrated link between the 2*/
l21=1; m1=0; do while l21<=rows(equilbanks) and m1<1;
if M[illbanks[l2],equilbanks[l21]]==1 and
M[liqbanks[l1],equilbanks[l21]]==1;
m1=1; /* count this bank as a (potential) receipient of funds and
STOP (m1=1) */
if payee==0; payee=illbanks[l2];
else; payee=payee|illbanks[l2]; /*vertical concatenation */
endif;
else; endif;

l21=l21+1; endo;

endif;

l2=l2+1; endo;

/* Number of potential reciepients*/
illneighb=rows(payee);

/*"ILL partners=" ; illneighb;*/

if payee/=0;

/*probability that an illiquid bank gets funds*/
pfunds=(bp[liqbanks[l1]]/illneighb);

/* PAYMENTS */

/*if pfunds>=1, ALL the illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/

if pfunds>=1;

bankspaid=payee;

else;

```

```

/*if pfunds<1, ONLY SOME illiquid neighbors and quasi-neighbors get
funds*/

/*sample bp[liqbanks[l1]] banks from the payee vector */
bankspaid= sample(payee, bp[liqbanks[l1]]);

/*"banks paid" ;; bankspaid;*/

endif;

l3=1; do until l3>rows(bankspaid);
deltabp[bankspaid[l3]]=deltabp[bankspaid[l3]]+1;
l3=l3+1;
endo;

deltabp[liqbanks[l1]]=deltabp[liqbanks[l1]]-rows(bankspaid);

/*Number of payments made*/
e=e+rows(bankspaid);

else;endif;

l1=l1+1; endo;

bp=bp+deltabp;

/* Updating Banks Status*/
equilbanks1=selif(liqbanks, bp[liqbanks[:,1]] .eq 0);
equilbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[:,1]] .eq 0);
equilbanks=equilbanks|equilbanks1|equilbanks2;
equilbanks=delif(equilbanks, equilbanks[:,1].==miss(0,0));
equilbanks=sortc(equilbanks,1);

liqbanks1=delif(liqbanks, bp[liqbanks[:,1]] .eq 0);
liqbanks2=selif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].> 0);
liqbanks=liqbanks1|liqbanks2;
liqbanks=delif(liqbanks, liqbanks[:,1].==miss(0,0));
liqbanks=sortc(liqbanks,1);

```



```

illbanks=delif(illbanks, bp[illbanks[:,1]].>=0);
nill=partnerbanks(M,bp);
/*
"Number of payments made=";;e;
"Number of Illiquid Banks with Liquid Partners=";; nill;
*/
MC2[q,k]= nillbanks(bp);
MC3[q,k]= e;
k=k+1; endo;
MC1[q,1]=k-1;
q=q+1; endo;
MC=MC1~MC2~MC3;
/*ending Monte Carlo*/
/* Creating a BIG matrix of all results*/
if kindex==0; BIGMC=MC;
else; BIGMC=BIGMC|MC;
endif;
kindex=kindex+1;
endo;
output off;
screen on;
/* Counting the Number of Illiquid Banks with Liquid Partners or with Balanced
Partners who have Liquid Partners*/
proc partnerbanks(M,bp);
local k1,k2,k3,k4,n1;
n1=0;
k1=1; do while k1<=rows(bp);

```

```

if bp[k1]==-1 ;
/*k3 insures that having only one liquid partner or only one balanced partner with
liquid partners is enough */
/* first scan for direct liquid partners*/
k2=1 ; k3=0 ;
do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
else ;
endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;
/* if k3=0 scan for indirect liquid partners*/
if k3==0 ;
k2=1 ;
do while k2<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k1,k2]==1 and bp[k2]==0 ;
k4=1 ; do while k4<=rows(M) and k3<1 ;
if M[k2,k4]==1 and bp[k4]>=1 ; k3=1 ; n1=n1+1 ;
else ; endif ;
k4=k4+1 ; endo ;
else ; endif ;
k2=k2 + 1 ;
endo ;
else ; endif ;
else ; endif ;
k1=k1+1 ;
endo ;

```

```

    retp(n1);
endp;

/* Counting the Number of Illiquid Banks*/
proc nillbanks(bp);
    local k1,n1;
    n1=0;
    k1=1; do while k1<=rows(bp);
        if bp[k1]==-1;
            n1=n1+1;
        else; endif;
        k1=k1+1;
    endo;
    retp(n1);
endp;

/* Multinomial Distribution Procedure*/
proc randmn(r,c,p);
    local s, t, x;
    p = vec(p);
    s = cumsumc(p);
    t = s[rows(p)];
    if t /= 1;
        errorlog("RANDMN : Note multinomial probabilities do not sum to 1.");
    endif;
    if t >= 1;
        s = trimr(s,0,1);
    endif;
    x = rndu(1,r*c);

```

```

x = sumc(x .> s);
x = reshape((x+1),r,c);
retp(x);
endp;

/***** SAMPLE FROM VECTOR *****/
/* by Anton I. Granik & S. Vivier-Lirimont
** Format : y = sample(x,n);
**
** Input : x K by 1 vector to be sampled from
** n integer : the sample size
** Output : y resulting sample of DISTINCT elements of x
*/
proc sample(x,n);
local y,j,prob,e,userows;
y={};
j=1; do until j>n;
e=ones(rows(x),1);
prob=(1/rows(x))*ones(rows(x),1);
userows=1+sumc(rndu(1,1).>cumsumc(prob));
e[userows]=0;
if j==1; y=x[userows];
else; y=y|x[userows];
endif;
x=selif(x,e);
j=j+1; endo;
retp(y);
endp;

```

```

/* Creating a K-Regular Matrix */
proc kregular(links,n);
local k,i,j,p,n1,n2;
k=links;
M=zeros(n,n);
if k==n-1;
/*COMPLETE NETWORK*/
i=1; do until i>rows(M);
j=1; do until j>rows(M);
if j/=i; m[i,j]=1;
else; endif;
j=j+1; endo;
i=i+1; endo;
else;
p=floor(k/2);
if p-(k/2)<0;
i=1; do until i>n/2;
M[i,i+n/2]=1;
M[i+n/2,i]=1;
i=i+1; endo;
endif;
i=1; do until i>rows(M);
n1=i+p; n2=i-p;
if n1>n;
if i+1<=n;
M[i,i+1:n]=ones(1,n-i);
else; endif;

```

```
M[i,1 :p+i-n]=ones(1,p+i-n);
M[i,i-1 :n2]=ones(1,p);
elseif n2<1;
M[i,i+1 :n1]=ones(1,p);
if i-1>0;
M[i,1 :i-1]=ones(1,i-1);
else; endif;
M[i,n-p+i :n]=ones(1,p-i+1);
else;
M[i,i+1 :n1]=ones(1,p);
M[i,n2 :i-1]=ones(1,p);
endif;
i=i+1; endo;
endif;
format /rd 4,0;
if M'/=M; "Error";
endif;
retp(M);
endp;
end;
```

# Bibliographie

P. Aghion, P. Bolton, M. Dewatripont (2000), Contagious bank failures in a free banking System, *European Economic Review*, 44, pp 713-718.

I. Alonso (1996) On Avoiding Bank Runs, *Journal of Monetary Economics*, 37, pp 73-87.

F. Allen, D. Gale (2000), Financial Contagion, *Journal of Political Economy*, 108, pp 1-33.

F. Allen, D. Gale (2003), Competition and Financial Stability, prepared for the World Banks and Federal Reserve Bank of Cleveland project on Bank Competition.

P. Angelini, G. Maresca, D. Russo (1996), Systemic risk in the netting system, *Journal of Banking & Finance* 20, pp 853-868.

V. Bala, S. Goyal (2000a), A Strategic Analysis of Network Reliability, *Review of Economic Design*, 5, pp 205-228.

V. Bala, S. Goyal (2000b), A Non-cooperative Model of Network Formation, *Econometrica*, 68, pp 1181-1230.

P. Bartholomew, G. Whalen (1995), Fundamentals of Systemic Risk, in Kaufman G Banking, Financial Markets and Systemic Risk, *Research in Financial Services Private and Public Policy*, vol 7, pp 3-17.

P. Belleflamme, F. Bloch (2002), Market Sharing Agreements and Stable Collusive Networks, mimeo : University of London & GREQAM.

H. Bernard, J. Bisignano (2000), Information, Liquidity Risk in the International Interbank Market : Implicit Guarantees and Private Credit Market Failure, *BIS Working Papers* N°86.



S. Bikhchandani, D. Hirshleifer, I. Welch (1992), A Theory of Fads, Fashion, Custom and Cultural Change as Informational Cascades, *Journal of Political Economy*, 100, pp 992-1026.

S. Bhattacharya, D. Gale (1987), Preference Shocks, Liquidity and Central Bank Policy. In *New approaches to Monetary Economics*, edited by W. Barnett and K. Singleton, Cambridge University Press, Cambridge.

F. Black, M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, n°3, pp 637-54.

F. Bloch (2001), Coalitions Networks in Industrial Organization, mimeo : GRE-QAM.

M. Boss, H. Elsinger, M. Summer, S. Thurner (2003) The Network Topology of the Interbank Market, mimeo : Oesterreichische Nationalbank & University of Vienna.

J. Bryant (1980) A Model of Reserves, Bank Runs and Deposit Insurance, *Journal of Banking and Finance*, 4, pp 749-761.

C. Calomiris, G. Gorton (1991), The Origins of Banking Panics, Models, Facts and Bank Regulation, in *Financial Markets and Financial Crises*, edited by G. Hubbard, University of Chicago Press, Chicago.

A. Calvo-Armengol (2003), Job Contact Networks, mimeo Univeritat Autonomia de Barcelona.

R. Chang, A. Velasco (1998a) Financial fragility and the Exchange Rate Regime. NBER Working Paper 6469.

R. Chang, A. Velasco (1998b) Financial Crises in Emerging Markets : A Canonical Model NBER Working Paper 6606.

R. Chang, A. Velasco (1998c) The Asian Liquidity Crisis NBER Working Paper 6796.

R. Chang, A. Velasco (2000) The Choice of Foreign Debt Maturity Journal of International Economics p 169-194.

VV. Chari, R. Jagannathan (1988), Banking Panics, Information and Rational Expectations Equilibrium, Journal of Finance, 43, pp 749–761.

VV. Chari, P. Kehoe (2000) Financial Crisis as Herds Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 600.

Y. Chen (1999), Banking Panics : the Role of the First-Come First-served Rule and Information Externalities, Journal of Political Economy, 107(5), 946–968.

R. Cifuentes (2003), Banking Concentration : Implications for Systemic Risk and Safety Net Design, Central Bank of Chile, Working Papers n°231.

M. Corominas-Bosch (1999), On Two-Sided Network Markets, Ph.D. Dissertation : Universitat Pompeu Fabra.

M. Corominas-Bosch (2004), Bargaining in a Network of Buyers and Sellers, Journal of Economic Theory, 115, pp 35-77.

G. Corsetti, P. Pesenti, N. Roubini (1998a) What caused the Asian Currency and Financial Crisis. Part I : Macroeconomic Overview and Part II : the Policy Debate. Disponible sur la homepage de Corsetti.

G. Corsetti, P. Pesenti, N. Roubini (1998b) Paper Tigers? A model of the Asian Crisis NBER Working Paper 6783.

S. Currarini, M. Morelli (2000), Network Formation with Sequential Demands, Review of Economic Design, 5, pp 229–250.

S. Currarini (2002), Stable Networks with Externalities, mimeo : Universita di Venezia.

A. Dasgupta (2000), Financial Contagion through Capital Connections : A Model of the Origin and Spread of Bank Panics, mimeo Yale University, forthcoming in Journal of the European Economic Association.

O. De Bandt (1995), Competition among Financial Intermediaries and the Risk of Contagious Failures, Notes d'Etudes et de Recherche de la Banque de France, 30.

O. De Bandt, P. Hartmann. (2000) Systemic Risk : a Survey, European Central Bank, Working Paper Series 35.

H. Degryse, G. Nguyen (2004), Interbank Exposures : An empirical Examination of Systemic Risk in the Belgian Banking System, mimeo National Bank of Belgium.

D. Diamond, P. Dybvig (1983), Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity, Journal of Political Economy, 91(3), pp 401–419.

B. Dutta, M.O. Jackson (2002), The Stability and Efficiency of Directed Communication Networks, Review of Economic Design, 5, pp251–272.

B. Dutta, M.O. Jackson (2003), On the Formation of Networks and Groups, in Models of the Formation of Networks and Groups, edited by Dutta & Jackson, Springer-Verlag, Heidelberg.

B. Dutta, S. Mutuswami (1997), Stable Networks, Journal of Economic Theory, 76, pp 322–344.

L. Eisenberg, T. Noe (2001), Systemic Risk in Financial Systems, Management Science, Vol 47, No 2, pp 236 – 249.

H. Elsinger, A. Lehar, M. Summer (2002), The Risk of Interbank Credits : A new Approach to the Assessment of Systemic Risk, prepared for the Workshop on Banking Regulation and Financial Stability of the Venice Summer Institute.

W.R Emmons (1995), Interbank Netting Agreements and the Distribution of Bank Default Risk, The Federal Reserve Bank of St. Louis, Working Paper Series 016-A.

X. Freixas, C. Holthausen. (2001), Interbank Market Integration under Asymmetric Information, European Central Bank, Working Paper Series 74.

X. Freixas, B. Parigi, J.C. Rochet (2000), Systemic Risk, Interbank Relations and Liquidity Provision by the Central Bank, Journal of Money Credit and Banking, 32(3/2), pp 611–640.

C.H. Furfine (1999), Interbank Exposures : Quantifying the Risk of Contagion, Working Paper N°70, Bank for International Settlements, Basel.

C.H. Furfine (2001), The Interbank Market during a Crisis, Working Paper N°99, Bank for International Settlements, Basel.

C.H. Furfine (2003), Interbank Exposures : Quantifying the Risk of Contagion, Journal of Money, Credit and Banking 35 pp 111-128.

T. Furusawa, H. Konishi (2002), Free Trade Networks, mimeo : Yokohama National University and Boston College.

P. Garber, V. Grilli (1989), Bank Runs in Open Economies and the International Transmission of Panic, Journal of International Economics, 27, pp 165–175.

I. Goldstein, A. Pauzner (2004), Contagion of Self Fulfilling Financial Crises due to Diversification of Investment Portfolios, Journal of Economic Theory, 119, pp 151-183.

C.A.E Goodheart, D. Schoenmaker (1993), Institutional Separation between Supervisory and Monetary Authorities, Mimeo, London School of Economics.

G. Gorton (1985), Bank Suspension of Convertibility, *Journal of Monetary Economics*, 15, pp 177–193.

Y. Gounin, S. Vivier-Lirimont (1999) *La Crise Asiatique Aspects Economiques et Politiques* PUF.

S. Goyal, S. Joshi (2000), Networks of Collaboration in Oligopoly, Discussion Paper TI 2000-092/1, Timbergen Institute, Amsterdam-Rotterdam.

S. Goyal, S. Joshi (2001), Unequal Connections, mimeo : University of London and George Washington University.

M. Granovetter (1973), The Strength of Weak Ties, *American Journal of Sociology*, 78, pp 1360–1380.

Gropp & Vesala (2003), Measuring Bank Contagion Using Market Data, 2003 Bank of Canada Conference on Financial Stability.

S.R. Hammersley, J.M. Broadbent (1985) Works on percolation quoted by D. Stauffer, dans *Introduction to percolated theory*, Taylor & Francis.

D.B Humphrey (1986), Payments Finality and Risk of Settlement Failure, in *Technology and the Regulation of Financial Markets : Securities, Futures and Banking*, édité par Saunders & White, Lexington, Leington Books pp 97-120.

Y.M. Ioannides, L. Datcher Loury (2002), Job Information Network, Neighborhood Effects and Inequality, mimeo : Tufts University.

C. Jacklin, S. Bhattacharya (1988), Distinguishing Panics and Information Based Runs : Welfare and Policy Implications, *Journal of Political Economy*, 96(3), pp 568–592.

M.O. Jackson, A. Van den Nouweland (2000), Strongly Stable Networks, mimeo : Caltech.

M.O. Jackson, A. Watts (2001), The Existence of Pairwise Stable Networks, *Seoul Journal of Economics*, 14 (3), pp 299–321.

M.O. Jackson, A. Watts (2002a), The Evolution of Social and Economic Networks, *Journal of Economic Theory*, 106, pp 265–295.

M.O. Jackson, A. Watts (2002b), On the Formation of Interaction Networks in Social Coordination Games, *Games and Economic Behavior*, 41 (2), pp 265–291.

M.O. Jackson, A. Wolinsky (1996), A Strategic Model of Social and Economic Networks, *Journal of Economic Theory*, 71, pp 77–74.

M.O. Jackson (2003a), The Stability and Efficiency of Economic and Social Networks, in *Advances in Economic Design*, edited by Koray and Sertel, Springer-Verlag, Heidelberg.

M.O. Jackson (2003b), A New Family of Allocation Rules for Network Games, mimeo : Caltech.

M.O. Jackson (2003c), A Survey of Models of Network Formation : Stability and Efficiency, in *Group Formation in Economics : Networks, Clubs and Coalitions*, edited by Demange & Wooders, Cambridge University Press, Cambridge.

G. Kaminsky, C. Reinhart (1999) The Twin Crises : The Roles of Banking and Balance-of-Payments Problems, *American Economic Review* vol 89 n°3 p 473-500.

R. Kranton, D. Minehart (2001), A Theory of Buyer-Seller Networks, *American Economic Review*.

R. Lagunoff, S. Schreft, (2001), A Model of Financial Fragility, *Journal of Economic Theory*, 99, pp 220-264.

Lehar, A. (2003), *Measuring Systemic Risk : A Risk Management Approach*,. Mimeo, University of British Columbia.

P. Masson (1998) Contagion : Monsoonal Effects, Spillovers and Jumps between Multiple Equilibria IMF Working Paper WP/98/142.

M. Maurer, G. Sheldon (1998) Interbank Lending and Systemic Risk : An Empirical Analysis for Switzerland, *Schweiz Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik* vol 134, No 4, pp 685-704.

S. Morris, H.S. Shin (1998) Unique Equilibrium in a Model of Self-Fulfilling Currency Attacks *American economic Review* ,vol 88, pp 587-597.

S. Morris, H.S.. Shin (1999) A Theory of The Onset of Currency Attacks in Agenor, Miller, Weber and Vines (1999).

J. Mueller (2003), Two Approaches to Assess Contagion in the Interbank Market, mimeo Swiss National Bank.

J.C Rochet, J. Tirole (1996a), Interbank Lending and Systemic Risk, *Journal of Money Credit and Banking*, 28(4), pp 733–762.

J.C Rochet, J. Tirole (1996b), Controlling Risk in Payment Systems, *Journal of Money Credit and Banking*, 28(4), pp 832–862.

D. Schoenmaker (1998), Contagion Risk in Banking, in *Risk Measurement and Systemic Risk*, Proceedings of the Second Joint Central Bank Research Conference, Bank of Japan.

T. Temzelides (1997), Evolution Coordination and Banking Panics, *Journal of Monetary Economics*, 40, pp 193–183.

C. Upper, A. Worms (2002), Estimating Bilateral Exposures in the German Interbank Market : Is there a Danger of Contagion ? Deutsche Bundesbank Discussion Paper 09/02.

P. Wang, A. Watts (2002), Formation of Buyer-Seller Trade Networks in a Quality-Differentiated Product Market, mimeo : Penn State and Southern Illinois University.

D.J. Watts (1999), *Small Worlds : The dynamics of Network between Order and Randomness*, Princeton University Press.

Weisbush, A. Kirman, Herrerher (2000), Market Organization, *Economica*, 110, pp 411–436.

S. Wells (2002), UK Interbank Exposures : Systemic Risk Implications, Bank of England Financial Stability Review, pp 175—182.

H.C. Wolf (1999) International Asset Price and Capital Flow Co-movements during Crisis : The Role of Contagion, Demonstration Effects and Fundamentals World Bank/IMF/WTO Conference on Capital Flows, Financial Crisis and Policies April 15-16.



# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Fragilités bancaires et réseaux financiers, une revue de la littérature</b>	<b>14</b>
Introduction . . . . .	15
1.1 Les modèles de fragilité bancaire . . . . .	15
1.1.1 Les modèles fondateurs à une seule banque . . . . .	15
1.1.2 Les modèles avec plusieurs banques . . . . .	21
1.1.3 Eléments empiriques les fragilités interbancaires . . . . .	25
1.2 Théorie des réseaux et applications sur la fragilité financière . . . . .	29
1.2.1 Eléments sur la théorie des réseaux . . . . .	29
1.2.2 Réseaux et fragilités financières . . . . .	30
1.2.3 Structures empiriques de réseaux interbancaires . . . . .	41
Conclusion . . . . .	43
<b>2 Réseaux interbancaires et gestion du risque de liquidité</b>	<b>45</b>
Introduction . . . . .	46
2.1 Le modèle . . . . .	49
2.1.1 La solution autarcique . . . . .	51
2.1.2 La solution du planificateur bienveillant . . . . .	53
2.1.3 Comparaison des allocations en terme de bien être . . . . .	54
2.2 Décentralisation de l'allocation optimale par un réseau interbancaire . .	56
2.2.1 Définitions et hypothèses sur le réseau interbancaire . . . . .	56

2.2.2	Décentralisation de l'allocation du planificateur bienveillant par une chambre de compensation commune . . . . .	61
2.3	Réseaux interbancaires . . . . .	63
2.3.1	Un exemple introductif à 4 banques . . . . .	63
2.3.2	Généralisation à un réseau à 2p banques . . . . .	64
2.4	Intégration d'un coût d'accès . . . . .	67
2.4.1	L'allocation du planificateur . . . . .	68
2.4.2	Décentralisation des allocations optimales . . . . .	70
2.4.3	Réseau de coût agrégé minimum . . . . .	71
2.4.4	Solution stable Pareto améliorante . . . . .	75
	Conclusion . . . . .	76
2.5	Annexes . . . . .	78
2.5.1	Montant d'actif long terme qu'une banque peut liquider sans provoquer de course à la banque . . . . .	78
2.5.2	Démonstration de la proposition 1 . . . . .	79
2.5.3	Démonstration du lemme 1 . . . . .	80
2.5.4	Démonstration du lemme 2 . . . . .	82
2.5.5	Démonstration de la proposition 3 . . . . .	84
2.5.6	Démonstration de la proposition 4 . . . . .	85
2.5.7	Démonstration de la proposition 5 . . . . .	86
2.5.8	Démonstration de la proposition 6 . . . . .	87
2.5.9	Démonstration de la proposition 7 . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Efficacité distributive des réseaux : une mesure par simulations</b>	<b>93</b>
	Introduction . . . . .	94
3.1	Le modèle et les simulations . . . . .	96
3.1.1	L'économie interbancaire . . . . .	96
3.1.2	Critères d'efficacité . . . . .	99

3.1.3	Le programme de simulations . . . . .	100
3.1.4	Construction des réseaux $k$ -réguliers . . . . .	103
3.2	Efficacité relative des réseaux décentralisant l'allocation Pareto optimale	104
3.2.1	Efficacité temporelle . . . . .	104
3.2.2	Efficacité allocative . . . . .	107
3.2.3	Efficacité transactionnelle . . . . .	113
3.3	Efficacité relative des réseaux ne décentralisant pas l'allocation Pareto optimale . . . . .	115
3.3.1	Le réseau circulaire . . . . .	115
3.3.2	Les réseaux $k$ -réguliers avec $k \leq p$ . . . . .	117
3.4	Etude d'un cas particulier de réseau $k$ -régulier . . . . .	119
3.4.1	Construction des réseaux $k$ -réguliers particuliers . . . . .	120
3.4.2	Décentralisation de l'allocation Pareto optimale et mesures d'efficacité . . . . .	120
	Conclusion . . . . .	123
3.5	Annexes . . . . .	125
3.5.1	Résultats obtenus pour des réseaux à 30 banques . . . . .	125
3.5.2	Résultats complémentaires obtenus dans le cas du réseau à 100 banques . . . . .	128
3.5.3	Résultats obtenus pour des réseaux à 500 banques . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Contagion, crise et structure de réseau</b>	<b>133</b>
	Introduction . . . . .	134
4.1	Structure de réseau et contagion . . . . .	136
4.1.1	Cadre d'analyse . . . . .	136
4.1.2	Ordre de liquidation des actifs et comportement des banques à la période $t = 1$ . . . . .	142
4.1.3	Valeur des paiements interbancaires en $t = 1$ . . . . .	143

4.1.4	Contagion par les actifs et crise bancaire à court terme . . . . .	144
4.1.5	Contagion et crise bancaire à long terme . . . . .	153
4.2	Contagion dans un réseau à 6 banques : un exemple introductif . . . . .	155
4.2.1	Le réseau en ligne . . . . .	156
4.2.2	Le réseau circulaire . . . . .	158
4.2.3	Le réseau en étoile . . . . .	160
4.2.4	Le réseau complet . . . . .	163
4.3	Généralisation à un réseau à $n$ banques . . . . .	167
4.3.1	Caractérisation de la contagion dans les structures de réseaux simples . . . . .	167
4.3.2	Caractérisation de la contagion dans les structures de réseaux quelconques . . . . .	169
4.3.3	Mesure de l'ampleur de la crise à court terme selon la structure du réseau . . . . .	174
	Conclusion . . . . .	179
4.4	Annexes . . . . .	180
4.4.1	Démonstration de l'existence d'un vecteur de paiement de faillite à court terme . . . . .	180
4.4.2	Démonstration de l'unicité du vecteur de paiement de faillite à court terme . . . . .	180
4.4.3	Démonstration de la proposition 2 . . . . .	184
4.4.4	Le réseau circulaire . . . . .	188
4.4.5	Démonstration de la proposition 3 . . . . .	189
4.4.6	Démonstration de la proposition 4 . . . . .	190
4.4.7	Démonstration de la proposition 5 . . . . .	192
4.4.8	Démonstration de la proposition 6 . . . . .	193

<b>Programmes sous Gauss</b>	<b>205</b>
4.5 Réseau circulaire . . . . .	206
4.6 Réseau complet . . . . .	218
4.7 Réseau en étoile . . . . .	230
4.8 Réseau en étoile contrainte . . . . .	241
4.9 Réseaux $k$ –réguliers quelconques . . . . .	252
4.10 Réseaux $k$ –réguliers particuliers . . . . .	265
<b>Bibliographie</b>	<b>278</b>